MISCELLANEA LOGICA

TOM II

Petr Jirků a Vítězslav Švejdar

Editoři

Univerzita Karlova v Praze

Nakladatelství Karolinum

1999

http://logika.ff.cuni.cz/papers/misclogII.pdf

Recenzenti: RNDr. Kamila Bendová, CSc.
RNDr. Jiřina Vejnarová, CSc.

ISBN 80–7184–790–9

Obsah

Kapitola 1

O výuce logiky

1.1 Provokácia ako motivácia k štúdiu logiky *František Gahér*

Motto:
Když jeden z přítomných řekl: "*Přesvědč mě, že je logika užitečná,*" odpověděl Epiktétos: "*Chceš, abych ti to dokázal?*" - "*Ano.*" - "*Potom musím vést logický důkaz.*" - Když ten souhlasil, řekl Epiktétos: "*Ale jak poznáš, že tě neklamu sofizmatem?* " - A když se ten člověk odmlčel, řekl: "*Vidíš, jak sám uznáváš, že je to nauka nutná, neboť bez ní nemůžeš poznat ani to, zda je nutná či ne.*"
(Rozpravy, II, 25, upravené podľa J. Barnes: *Logic and Imperial Stoa,* 1997)

1.1.1 Je potrebné študentov špeciálne k štúdiu logiky motivovať?

Niektoré odpovede (názory):
A: Nie - netreba, pretože:

i) potreba logiky je nepochybná a zrejmá, čo je potvrdzované napr.: jednak tým, že sa "odjakživa" učila ako jeden predmet trívia, jednak tým, že ju učenci zaradili do súčasných osnov (študenti nemajú dôvod pochybovať o ich vedeckej a pedagogickej autorite);

ii) potreba logiky sa dá ukázať až po výklade a zvládnutí základných partií odboru a predtým by to bolo buď nepresné, alebo pre auditórium nepochopiteľné zdôvodnenie;

iii) zrejme máloktorý učiteľ dokáže presvedčivo vysvetliť žiakom, prečo sa majú učiť básničky naspamäť, a predsa sa učia (ak nechcú zlú známku a pod.) a analogicky to platí aj pre logiku.

B: Áno - treba, pretože:

i) študenti neprejavia dostatočný záujem o logiku, a preto pochopia z nej málo, ak vôbec niečo;

ii) potrebu logiky by inak zistili (ak vôbec) až vtedy, keď bude pre nich neskoro;

iii) špecifickú stimuláciu potrebuje každý predmet štúdia, ktorý je z hľadiska myšlienkovej disciplíny "náročnejší" (zrejme to nepotrebuje napr. kreslenie alebo seminár z postmoderny).

1.1.2 Predsudky učiteľskej zhovievavosti

Pred tým, ako uvediem vlastný názor k otázke motivácie, pokúsim sa uviesť niekoľko východísk - podľa môjho názoru skôr predsudkov, podľa iných však predpokladov - učiteľskej zhovievavosti a niekoľko mojich postrehov či empirických zovšeobecnení (neviem, koľko rokov, ako a kde má človek učiť logiku, aby už mohol hovoriť o učení z vlastnej skúsenosti). Nebudem hovoriť o výnimočnej situácii, keď študenti prídu študovať už s tým, že logiku nielen považujú za neobyčajne zaujímavý predmet štúdia, ale mu aj ochotne sami od seba venujú veľkú časť svojho študijného záujmu a trpezlivosti. Preto ďalšie moje úvahy, zamerané skôr na situácie nepriaznivejšie pre logiku, nie sú všeobecné a nemusia platiť pre výnimočnú situáciu.

Predpoklady učiteľskej zhovievavosti či - podľa mňa - vhodné predpoklady nato, aby učiteľské úsilie s vysokou pravdepodobnosťou nedosiahlo svoj cieľ a vlastne zlyhalo:

1. Väčšina študentov je hladná po vedomostiach a má hlboký vnútorný záujem sa vzdelávať, získavať poznatky a pod., čo je dostatočnou motiváciou štúdia ktoréhokoľvek predmetu, a teda aj logiky;

2. Väčšina študentov si vypočíta príklady na domácu úlohu, preštuduje daný článok a pod. aj vtedy, keď to učiteľ podrobne neskontroluje;

3. Väčšina študentov si určite urobí domácu úlohu, preštuduje daný článok a pod. vtedy, keď to učiteľ podrobne skontroluje, ale nevyvod-

zuje pritom dôsledky typu zápočet neudelený, hoci by tým hrozil. Podľa môjho názoru jedna z prvých informácií, ktoré si zaobstarávajú prváci od študentov vyšších ročníkov, sa týka "povahy" učiteľov jednotlivých predmetov; v tomto ohľade sú študenti neobyčajne realistickí a pragmatickí - ak je napr. učiteľ "mäkký" a nevyhadzuje zo školy, tak s tým počítajú a používajú napr. metódu súcitu, "unavovania" učiteľov, predstierania hlbokého záujmu, ale iba čírou náhodou o iný predmet a pod.

1.1.3 Empirické generalizácie z pedagogickej praxe

Čím ďalej, tým viac nadobúdam (nerád) presvedčenie, že:

1.a) "Študent x je od prírody **tvor lenivý**"

1.b) Ak študent x náhodou či mimovoľne vykonáva činnosť, ktorá sa podobá učeniu, tak sa riadi fyzikálnym princípom extrémneho účinku - "minimaxu" - **princípom minimálnej vynaloženej práce na dosiahnutie maximálneho výsledku**; dôsledkom tohto princípu je aj to, že študent:

1.b1) sa **učí iba to, čo učiteľ preveruje** štandardne kladenými otázkami a o iné poznatky a súvislosti nejaví skoro žiadny záujem (veď sú z hľadiska efektivity jeho činnosti zbytočné);

1.b2) pokiaľ nie je prinútený, **nepracuje systematicky** počas semestra, ale všetko si odkladá na poslednú chvíľu - na skúškové obdobie alebo ešte neskôr, čo v prípade logiky je zrejme najnevhodnejší postup;

1.c) propozičná forma (1.a) nadobúda (skôr výnimočne) pravdivostnú hodnotu nepravda pre tie svetamihy a pre tie x, pre ktoré buď **pud strachu**, alebo vidina **zisku** alebo pud **zvedavosti** a **hanby** (ješitnosti), premohli lenivosť.

1.1.4 Parametre "polotovaru" a profesionálna orientácia

Čo by nemal prehliadnuť učiteľ logiky alebo čo by mal vedieť, ak on sám má pozitívny vzťah k štúdiu logiky (sám je motivovaný)?

Niektoré podľa mňa dôležité faktory, ktoré môžu spoluurčovať výber metódy motivácie a metód vyučovania vôbec:

1. Aké sú parametre "polotovaru", ktorý má učiteľ ďalej spracovávať – povaha predchádzajúceho vzdelania študentov - *čo vedia z matematiky*, či nemajú averziu k matematike; aká je *intuitívna sémantika*; ako

jemné problémy študenti vôbec registrujú – aká je ich "*konceptuálna rozlišovacia schopnosť*";

2. *študijná orientácia* - aká je *potenciálna potreba logiky* z hľadiska predpokladanej budúcej profesie;

3. miera nakazenia infekciou "*študentskej vychytralosti*" a "*úpadku pracovnej morálky*" (vo všeobecnosti rastie minimálne priamo úmerne s časom - s ročníkom štúdia);

4. či je u študentov štipka *skutočného záujmu* o predmet - nefalšovaná *zvedavosť*.

1.1.5 Ak motivovať, tak ako?

Musím sa ospravedlniť, že používam možno neštandardné názvy, ktoré bývajú používané v iných oblastiach a v iných súvislostiach, ba niekedy aj s emocionálnym zafarbením. Rovnako sa ospravedlňujem za používanie neučebnicovej terminológie pre typy pedagogických metód a ich klasifikáciu. Možno si jednotlivé typy zamieňam či neoprávnene spájam. Dôvod spočíva jednak v tom, že som už veľmi dávno nečítal žiadnu publikáciu z pedagogiky, jednak v tom, že ani teoretici vyučovania ani ich práce ma nikdy nenadchli, a v neposlednom rade i v tom, že mnou používané názvy považujem v niečom za výrečnejšie oproti kanonizovaným názvom.

I. Odmena a trest

Známou bipolárnou metódou motívácie nielen k štúdiu je metóda systematického **odmeňovania a trestania** či metóda "cukra a biča" (v extrémnych prípadoch by sa hodil názov metóda "psychického teroru") - zrejme sa tradične nazýva metódou autoritatívnou. Táto metóda je masovo najrozšírenejšia a pri cieľoch priemernej kvality najefektívnejšia; dosahuje veľmi dobré výsledky, ale iba po istú úroveň osvojenia si poznatkov a schopností; jej obmedzenia vzrastajú, ak sa vyžaduje individuálna logická fantázia, tvorivosť, samostatnosť. Základné negatívum tejto metódy: hlavným cieľom a nosičom záujmu o logiku je zmysel pre povinnosť a sila pochvaly alebo pud strachu v kombinácii s hanbou, a preto jej efektivita je limitovaná ich intenzitou a dosahom.

II. Správna investícia - princíp ekonomickej efektivity

Tradičná pozitívna metóda sa zakladá na “princípe ekonomickej efektivity”: ak vynaložíte primerané úsilie na získanie tejto zručnosti, tak teraz budete za výkony, uskutočnené na jej základe spolu s využitím iných zručností a poznatkov, odmeňovaní iba známkou, ale neskôr aj dobre platení - budete mať **zisk**. Pozitívum: oslovuje široké spektrum “uvedomelých” poslucháčov. Obmedzenia: efektivita je obmedzená silou a dosahom odmeny či vidiny zisku; niektorí študenti (napr. filozofi) sú práve v romantickom či “básničkovom” období vývoja a majú k tejto metóde (i k celej logike) averziu; metóda správnej investície sa im môže zdať príliš prízemná.

III. Univerzálne orientovaná provokácia

Metóda univerzálne orientovanej provokácie spočíva v tom, že učiteľ ukáže problém, ktorý nemusí byť vôbec z oblasti potenciálnej profesie poslucháčov, ale taký, že poslucháči chápu, že **je to problém**, a to taký, ktorý vôbec **nevedia riešiť** alebo nevedia riešiť **jednoznačne** a riešenie tohto problému je (tak sa zdá) výlučne v **kompetencii logiky**. Napr. logické hádanky, paradoxy a pod., čiže zavedieme poslucháčov do účelovo definovanej situácie. Pozitívum: stimuluje samostatnosť, invenciu - logickú fantáziu. Obmedzenia: oslovuje iba tých, ktorí majú silne vyvinutý všeobecný pud zvedavosti, prípadne silnú ješitnosť; hrozí “obvinenie” z čistej akademickosti či nepraktickosti.

Príklad 1 *Ak nie je právnym predpisom ustanovené alebo účastníkmi dohodnuté inak, sú podiely všetkých spoluvlastníkov rovnaké.*

Zápis vo výrokovej logike: Na základe syntaktickej štruktúry sa môžeme prikloniť k zápisu

a) $\neg(p \vee q) \rightarrow r$

a predpokladáme, že v druhej podvete bolo vynechané iba sponové sloveso “je” a negátor je akoby pred zátvorkou; samozrejme po doplnení tohto vynechaného slova nezískame syntakticky adekvátny tvar:
Ak nie je právnym predpisom ustanovené alebo účastníkmi je dohodnuté inak, sú podiely všetkých spoluvlastníkov rovnaké,
ale musíme aj negátor preformulovať na spojenie “nie je pravda, že...”

Ak nie je pravda, že je právnym predpisom ustanovené alebo účastníkmi je dohodnuté inak, sú podiely všetkých spoluvlastníkov rovnaké.

Tieto komplikácie by nás mohli viesť k tomu, že adekvátny by mohol byť iný zápis:
b) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow r$
v tom prípade by priezračná formulácia vety v prirodzenom jazyku mala byť nasledovná:
Ak nie je právnym predpisom ustanovené alebo účastníkmi nie je dohodnuté inak, sú podiely všetkých spoluvlastníkov rovnaké.
V tomto druhom prípade ide zjavne o sylepsu - výpustka dvoch a viacerých výrazov, nie o elipsu ako v prvom prípade. Pomocou pravdivostnej tabuľky však študentom ľahko ukážeme, že tieto zápisy nie sú ekvivalentné a adekvátny k zamýšľanej propozícii by mal byť iba jeden. Ak by sme sa na základe významovej analýzy priklonili k prvému zápisu, tak by sa ponúkalo zovšeobecnenie, že v takýchto zložených formuláciach je vypustené iba jedno slovo a pozícia negátora je chápaná tak, že je umiestnený pred zátvorkou, hoci jeho slovné zachytenie tomu nenasvedčuje ani priezračne, ani jednoznačne.

Iný podobný príklad – P2 *Ak nemožno vadu odstrániť a ak nemožno pre ňu vec užívať dohodnutým spôsobom alebo riadne, je nadobúdateľ oprávnený domáhať sa zrušenia zmluvy.*

Pri analýze tejto normy budeme abstrahovať od deontických modalít a budeme ju chápať iba ako zložený výrok. Ak by sme použili na druhú zloženú časť antecedentu P2 pravidlo, ktoré sme vyťažili pri analýze prvého príkladu, tak získame nasledujúci zápis vo výrokovej logike:
a) $(\neg p_0 \wedge \neg(p \vee q)) \rightarrow r$
a podľa tohto zápisu priezračnejšia formulácia P2 v prirodzenom jazyku by mala byť: Ak nemožno vadu odstrániť a ak nie je pravda, že možno pre ňu vec užívať dohodnutým spôsobom alebo možno pre ňu vec užívať riadne, je nadobúdateľ oprávnený domáhať sa zrušenia zmluvy.
Čiže musíme urobiť dve zmeny - negátor preformulovať zo slovesnej predpony na samostatné slovné spojenie a umiestniť ho pred zátvorku a spojenie *možno pre ňu vec užívať* doplniť do druhej vety. Takáto výrazná úprava by mohla vyvolať pochybnosti o svojej adekvátnosti, a mohlo by sa diskutovať o inom zápise - napr:
b) $(\neg p_0 \wedge (\neg p \vee \neg q)) \rightarrow r$
V tomto prípade by priezračná formulácia druhej časti antecedentu v prirodzenom jazyku vyzerala nasledovne: "ak nemožno pre vadu užívať vec dohodnutým spôsobom alebo nemožno pre vadu vec užívať riadne". Na

základe významovej analýzy sa môžeme prikloniť skôr k tejto formulácii. Ilustrácia: ak sme kúpili práčku s neodstrániteľnou vadou a neperie kvôli nej riadne, tak by sme mali mať právo domáhať sa zrušenia zmluvy; podobne však aj v situácii, keď sme kúpili práčku s neodstrániteľnou vadou a neperie kvôli nej dohodnutým spôsobom; jednoducho negácia jednej z dvoch okolností (riadne; dohodnutým spôsobom) stačí nato, aby sme v prípade neodstrániteľnej vady mali právo domáhať sa zrušenia zmluvy. Asi nebolo zamýšľané stanoviť ako podmienku práva domáhať sa zrušenia zmluvy okrem neodstrániteľnosti vady aj konjunkciu dvoch negácií, resp. nie je to jednoznačne zachytené syntaktickou jazykovou štruktúrou.

V tomto prípade pravidlo z prvého príkladu nie je všeobecné a syntaktickú analýzu musíme dopĺňať sémantickou analýzou. Takéto riešenie nahráva úlohe sémantiky a ukazuje, že syntaktická štruktúra viet v prirodzenom jazyku nemusí byť postačujúca na určenie logickej štruktúry toho, o čom je táto veta. Lingvistika pri analýze takýchto viet zväčša konštatuje, že sú interpretovateľné rozlične.

Jednoduchou metódou študentom vieme vysvetliť, že tieto zápisy nie sú ekvivalentné – majú zjavne odlišné pravdivostné podmienky. Na zistenie skutočného zamýšľaného významu uvedených viet musíme vedieť medzi týmito zápismi vybrať - napríklad na základe jednoznačného pochopenia ich pravdivostných podmienok a ich porovnania s predpokladaným cieľom zákona.

IV. Špeciálne orientovaná provokácia

S predchádzajúcou metódou je podobná metóda špeciálne orientovanej provokácie - učiteľ vyberie problém z oblasti študijného zamerania alebo ešte lepšie z oblasti predpokladanej budúcej profesie poslucháčov, ostatné je rovnaké.

Táto metóda je stará – pekný príklad tejto metódy demonštrovali napr. vyslanci Atén v Ríme r. 156/5 p.n.l. – scholarchovia troch filozofických škôl – stoikov, akademikov a peripatetikov (epikurovci museli zostať doma), ktorí mali neobyčajný úspech (Diogenes Babylonský, Karneades, Kritolaos). Títo zástupcovia Atén mali vymôcť odpustenie pokuty 500 talentov, ktorú senát vyrúbil Aténam kvôli spustošeniu mesta Oropos. Predstúpili pred senát, kde bol ich tlmočníkom senátor C. Acilius a predtým každý z nich prednášal na ukážku pred veľkým zástupom

ľudí (voľne podľa Gellia, Noctes Atticae, VI 14,8 - 10). Ich vystúpenia boli dosť provokatívne a týkali sa napr. etickosti správania človeka: nemôže byť etickým človekom ten, kto nevie správne usudzovať, pretože rozhodnutie urobiť ten alebo onen skutok a to taký, ktorý bude v súlade s cnosťami, sa opiera o reťazec úsudkov a iba vtedy môžeme nadobudnúť istotu, že tieto úsudky sú správne, keď budeme poznať pravidlá správneho usudzovania a tie sú záležitosťou logiky.
Aulus Albinus, ktorý bol paetorom za konzulov Publia Scipia Cornelia Nausica a Marca Marcellana, hovoril Karneadovi: "Podľa tvojho názoru, nie som žiadny praetor, pretože nie som múdry, a toto nie je žiadne mesto a títo nie sú žiadni obyvatelia?"
Karneades: "Podľa názoru týchto stoikov ty nie si." (Cicero, Acad. pr. 45,137).

Jadro provokácie spočívalo v argumente, že nemôže byť skutočným politikom (konzulom, praetorom, senátorom, ...) ten, kto nevie správne usudzovať a šancu zaručene správne usudzovať aj v ťažkých situáciach bude mať iba ten, kto sa vyškolí v logike. Obmedzenia tejto metódy môžu byť voči všeobecne orientovanej provokácii výrazne menšie. Ak nezaberá ani jedna z metód motivácie II. až IV., tak je pravdepodobné, že máte pred sebou ignorantov. V tom prípade je zas vhodnejšia metóda I. odmeny a trestu, prípadne nie je účinná žiadna metóda.

V. Brainwashing - vymývanie predsudkov

Za špeciálny prípad metódy provokácie by sme mohli označiť metódu spochybňovania a odstraňovanie predsudkov, zdanlivo "nezvratných" právd, zaužívaných riešení, školometských odpovedí a pod. Túto metódu pracovne nazývam metóda *minibrainwashingu.*

Ak napríklad spochybníte naučenú odpoveď na nejakú otázku a opýtate sa, prečo je to tak, tak zväčša študenti v prvom ročníku dokážu ešte povedať nejakú vcelku rozumnú odpoveď, ale na ďalej iterované otázky k jednému problému už nevedia dať odpovede, pričom študenti sú skôr prekvapení, že sa ich vôbec niekto na niečo také a takým spôsobom môže pýtať.

Táto metóda je výborná a často nenahraditeľná aj ako úvod k štúdiu logiky. Obmedzenia: môže vyvolať negatívny postoj k vyučujúcemu, pocity straty istoty či ohrozenia integrity osobnosti študentov; je skôr parciálnou metódou a jej použitie je vyvažované tým, že po nej by mala nasledovať fáza pozitívneho, konštruktívneho budovania nejakého systémového vysvetlenia.

1.1.6 Prax výučby so zameraním na motiváciu

Metódou motivácie, ktorú uskutočňujem v praxi, býva "koktail" najmä vyššie uvedených jednoduchších metód. Na začiatku takmer všetkých kurzov profylakticky používam metódu minibrainwashingu.

V dvojsemestrovom kurze *Klasickej logiky* pre odbory filozofie v kombinácii (1 hod. prednáška, 2 hod. semináre) uprednostňujem metódu univerzálne orientovanej provokácie, dopĺňam ju metódou špeciálne orientovanej provokácie (problémy z filozofickej spisby či filologickej problematiky) a v primeranej (nutnej) miere používam aj ostatné metódy.

Poznámka: dielo, ktoré je hádam najbohatšie na logické úsudky a argumenty (hoci niektoré z nich sú triviálne chybné), ktoré sú aj z pedagogického hľadiska vhodné najme pre filozofov, je dielo Sexta Empirika *Proti logikom* (existuje latinský, anglický, ruský aj poľský preklad; precízny je podľa mňa poľský preklad).

Ako vhodné problémy pre špeciálne orientovanú provokáciu sú napr. dôkazy existencie Boha – napr. dôkaz prvej príčiny u sv. Tomáša Akvinského (analýza predpokladov, pokus o dôkaz, doplnenie predpokladov, nový dôkaz), Anselmov dôkaz a pod.; prof. R. Kamitz z Grazu využil Tichého dôkaz sporu v Popperovej teórii verysimilitude na efektné zdôvodnenie potreby logiky pre filozofov. Takéto motivácie však už predpokladajú jednak zvládnutie logického aparátu, jednak značný časový fond. Preto je vhodné najprv formulovať, ukázať problém a naznačiť, že bez nejakého prepracovaného aparátu logiky asi nevieme nájsť riešenie, a po osvojení takéhoto aparátu (v druhom semestri) demonštrovať jeho efektivitu. Je to akoby dávkovaná motivácia, vyžaduje väčšie sústredenie a hrozí, že záujem "vyprchá" skôr, ako sa podarí demonštrovať potrebu logiky.

1.1.7 Poznámka k metódam výučby

Domnievam sa, že ak chceme u nematematicky či neprírodovedne orientovaných študentov, aby sa im pojem dôkazu naozaj vžil, je vhodný primeraný a pestrý tréning. Mnohí mladí ľudia sa hlásia na humanitné odbory na základe eliminačnej metódy, pretože im nejde alebo neznášajú matematiku, a preto napríklad práve filozofi potrebujú dávkované tréningové zaťaženie. Aby zaručene vystúpila do popredia problematika logického vyplývania a do úzadia bola zatlačená na prvý pohľad najväčšia odlišnosť či bariéra - zvláštna jazyková symbolika - je vhodné na to zamerať metódy výučby. Vhodnými metódami na dosiahnutie tohto cieľa sú metódy podobné *vojenským výcvikovým metódam*: cieľom takýchto vojenských metód je naučiť určitú zručnosť takmer každého, a to zaručene, takže sa predpokladá, že každý cvičenec je taký (ne)schopný ako ten, ktorý je najneschopnejší zo všetkých. Napríklad študenti filozofie sa postupne učia používať metódy dokazovania toho istého v rozličných systémoch, a teda aj v rozličných symbolikách. Samé dôkazy by však svojou náročnosťou nemali zastrieť to invariantné v nich. Aj pre mňa bolo prekvapujúce, že ako veľmi vhodný sa na takúto intelektuálnu gymnastiku javí inak obsolétny **kategorický sylogizmus**. Nevediem študentov v kurze logiky k tomu, aby dôkazy robili pôvodnou metódou (prevádzania modov na mody prvej figúry a pod.), pretože je to podľa mňa ťažkopádna metóda a jej pravidlá by potrebovali zváštne zdôvodnenie (to sa snažíme robiť na výberovom predmete *Dejiny logiky*). Študenti majú dokázať platné mody najprv jednoduchou metódou *Vennových diagramov*, neskôr dôkazmi v *Boolovej algebre* a napokon v *predikátovej logike*.

1.1.8 Záver

Jedno zdanlivé odbočenie. O rímskej stoe panuje všeobecne rozšírený názor, že problematika logiky bola v nej zatlačená úplne do úzadia a najvýraznejší jej predstavitelia - Seneca, Epiktétos - sa venovali najme etike a o potrebe logiky sa dokonca vyjadrovali negatívne. Ukazuje sa - ako podrobne argumentuje J. Barnes v *Logic and Imperial Stoa* (Philosophica Antiqua, Brill 1997), že to je neadekvátne vysvetlenie. Naopak, o potrebe logiky pre etiku nepochybovali, ale pochybovali o účelnosti zaoberať sa iba sofizmami, apóriami a hádankami. Ich výzva bola orientovaná na tých, ktorí boli "zacyklení" v riešení logických paradoxov a nepoužívali logiku nato, aby žili eticky. Naopak, títo, ktorí zotrvávajú pri neúčelnom hrajkaní sa so sofizmami, "hnijú ako niekde pri Sirénach" - v živote sa správajú ako "epikurovci" - oddávajú sa iba slastiam a rozkoši. V tomto svetle asi treba rozumieť Epiktetovej kritike:
Jaká to nespravedlnost páchaná na vzdělancích! Tomu ses tedy naučil

tady? Nechceš titěrné závěrečky o těchto věcech ponechat jiným, lenošným človíčkům, aby zalezlí někde v koutku shrabovali svůj honoráříček nebo skuhrali, že jim nikdo nic nedává? Nechceš raději už vstoupit do života a užívat toho, čemu ses naučil? Neboť nejsou to malicherné závěrky, co nám teď chybí, vždyť knihy stoiků se malichernými závěrky jen hemží. Co nám tedy ještě chybí? Člověk, který jich bude užívat, který závěry bude dosvědčovat! (Rozpravy, II, 29, 54 až 56)
Táto výzva má hádam čo povedať nielen dnešným študentom logiky, ale aj nám - učiteľom logiky.

Prikláňam sa k názoru, že motivácia k štúdiu logiky je potrebná a často povaha či spôsob motivovania môže o úspechu celého podujatia rozhodnúť (kladne alebo záporne). Väčšina absolventov humanitných odborov po niekoľkých rokoch zabudne mnohé (ak nie takmer všetky) logické zákony, pravidlá a ich dôkazy. To, čo v nich však môže zostať, je hlboký zážitok z logiky - zážitok z toho, ako sa logika "robí" - zážitok zo spôsobu nastoľovania problémov a zážitok z metód riešenia týchto problémov: atmosféra "logickej disciplinovanosti a korektnosti".

Dúfam, že tento môj dosť nesúrodý príspevok bude považovaný aspoň za nádych špeciálne orientovanej provokácie.

František Gahér
Katedra logiky a metodológie vied
Filozofická fakulta Univerzity Komenského
Bratislava
E-mail: Gaher@fphil.uniba.sk

1.2 Poznámka o vztahu vyplývání v klasické predikátové logice *Vítězslav Švejdar*[1]

Logikové občas diskutují, zda lze logiku charakterizovat jako *vědu o vztahu vyplývání mezi výroky.* Filosofičtěji orientovaní logikové říkají, že (asi) ne, logika je přece mnohem širší disciplína, zahrnující například teorii argumentace, analýzu přirozeného jazyka nebo teorii pravdy. Naproti tomu matematikové jsou většinou ochotni se s charakteristikou logiky jako vědy o vztahu vyplývání spokojit, snad jen někteří by zdůraznili, že jde o vyplývání *mezi výroky v matematice.*

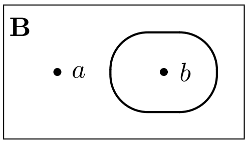
Je-li vyplývání pojmem pro logiku tak veledůležitým a matematiky vysoce ceněným (domníváme se, že oprávněně), je možné, že by se matematikové neshodli v odpovědi na otázku, jak formulovat definici tohoto pojmu? Ukazuje se, že tomu tak opravdu je. Základní příručky, které mají v titulu spojení "matematická logika", definici vyplývání nijak nezdůrazňují nebo dokonce pomíjejí, a lze se setkat se dvěmi různými (neekvivalentními) definicemi. V tomto článku si chceme obou možných definicí blíže všimnout a zamyslet se nad tím, jaké má která výhody.

Nejprve si stručně připomeňme základní pojmy logické syntaxe a sémantiky. *Jazyk* je množina symbolů L spolu s údajem, který o každému symbolu z L určuje, zda jde o *funkční* nebo *predikátový* symbol a jaká je jeho *četnost.* Například jazyk $\{<\}$ teorie uspořádání obsahuje jediný symbol $<$, který je binárním predikátem. Za *aritmetický jazyk* lze považovat množinu $\{+, \cdot, 0, 1, <\}$, která kromě binárního predikátového symbolu $<$ obsahuje ještě dva binární funkční symboly $+$ a $\cdot$ a dva nulární funkční symboly (neboli *konstanty*) 0 a 1. Volbou jazyka je dáno, jaké *formule* bereme v úvahu. Například $\forall x \exists y(x < y)$ je formule jazyka $\{<\}$ a $x \neq 0 \rightarrow \exists z(z \cdot x = y)$ je formule aritmetického jazyka. Formule jazyka L jsou ze symbolů v L sestaveny pomocí *logických spojek* $\rightarrow$, $\neg$, & a $\vee$, *kvantifikátorů* $\forall$ a $\exists$, *proměnných* $x, y, \ldots, x_0, x_1, \ldots$ a závorek. V predikátové logice s rovností (o které mluvíme) se rovnítko $=$ považuje za automaticky přípustný binární predikátový symbol. Zápis $x \neq 0$ je zkratka pro $\neg(x = 0)$.

---

[1]Tento příspěvek vznikl s částečnou podporou grantu GA UK 162/97 a grantu GA ČR 401/98/0383 Alternativy klasické logiky.

Struktura $\mathbf{D}$ *pro jazyk* L (někdy se také říká *realizace jazyka* L) sestává z neprázdné nosné množiny D a z funkce, která každému n-árnímu predikátovému symbolu (tj. predikátovému symbolu četnosti n) přiřazuje n-ární relaci na množině D a každému n-árnímu funkčnímu symbolu přiřazuje n-ární operaci na D. Přitom rovnítku je vždy přiřazena relace rovnosti na D, tj. relace $\{\,[x,x]\,;\,x \in D\,\}$. Například $\mathbf{A} = \langle Q, <^{\mathbf{A}} \rangle$, kde Q je množina všech racionálních čísel a $<^{\mathbf{A}}$ je její (přirozené) uspořádání, je strukturou pro jazyk $\{<\}$ teorie uspořádání. Protože 1-ární relace na D je totéž co podmnožina množiny D, struktura $\mathbf{B}$ znázorněná na obrázku 1.2.1 je strukturou pro jazyk $\{P\}$ s jediným unárním predikátovým symbolem P. Tato struktura má dvouprvkovou nosnou množinu $B = \{a, b\}$ a symbolu P je přiřazena jednoprvková množina $\{b\}$ vyznačená oválem (říká se také, že symbol P je ve struktuře $\mathbf{B}$ *realizován* množinou $\{b\}$). Příklady struktur pro aritmetický jazyk jsou *struktura celých čísel* $\mathbf{Z} = \langle Z, +^{\mathbf{Z}}, \cdot^{\mathbf{Z}}, 0^{\mathbf{Z}}, 1^{\mathbf{Z}}, <^{\mathbf{Z}} \rangle$ a *struktura reálných čísel* $\mathbf{R} = \langle R, +^{\mathbf{R}}, \cdot^{\mathbf{R}}, 0^{\mathbf{R}}, 1^{\mathbf{R}}, <^{\mathbf{R}} \rangle$, kde $+^{\mathbf{Z}}$, $\cdot^{\mathbf{Z}}$, $+^{\mathbf{R}}$, $\cdot^{\mathbf{R}}$ označují obvyklé operace s celými resp. reálnými čísly, $0^{\mathbf{Z}}$, $1^{\mathbf{Z}}$, $0^{\mathbf{R}}$, $1^{\mathbf{R}}$ označují celá (resp. reálná) čísla nula a jedna, a $<^{\mathbf{Z}}$ a $<^{\mathbf{R}}$ označují obvyklé uspořádání celých (reálných) čísel.



Obr. 1.2.1: Příklad struktury pro jazyk $\{P\}$ s jedním unárním predikátem

Slavná *Tarského definice* (říká se také *Tarského definice pravdy*) určuje, kdy je daná formule v dané struktuře splněna daným *ohodnocením proměnných.* Například formule $P(x)$ je ve struktuře $\mathbf{B}$ z obrázku 1.2.1 splněna ohodnocením e, které proměnné x přiřazuje prvek b. Formule $P(x) \to \forall y P(y)$ je naopak v téže struktuře splněna právě těmi ohodnoceními e, která proměnné x přiřazují prvek a. Formule $\forall y P(y)$ v $\mathbf{B}$ není splněna žádným ohodnocením proměnných. Fakt, že formule φ je ve struktuře $\mathbf{D}$ splněna ohodnocením e, se symbolicky zapisuje $\mathbf{D} \models \varphi[e]$. Je-li například φ formule $x \neq 0 \;\to\; \exists z(z \cdot x = y)$, pak φ je ve struktuře $\mathbf{Z}$ celých čísel splněna ohodnocením, které proměnným x a y přiřazuje čísla 3 a 15, což lze vyjádřit zápisem $\mathbf{Z} \models \varphi[3, 15]$. Řekneme, že formule φ *platí ve struktuře* $\mathbf{D}$, jestliže φ je v $\mathbf{D}$ splněna každým ohodnocením proměnných. Fakt, že φ v $\mathbf{D}$ platí, se píše $\mathbf{D} \models \varphi$. Pro platnost formule se tedy užívá týž symbol jako pro fakt, že φ je splněna. V zápisu $\mathbf{D} \models \varphi[e]$ symbol $\models$ označuje ternární relaci (mezi strukturou, formulí a ohodnocením proměnných), v zápisu $\mathbf{D} \models \varphi$ označuje binární relaci (mezi strukturou a formulí). Například je-li opět φ formule $x \neq 0 \to \exists z(z \cdot x = y)$, pak φ platí ve struktuře $\mathbf{R}$ reálných čísel, neplatí ale ve struktuře $\mathbf{Z}$ celých čísel, protože některými ohodnoceními proměnných v $\mathbf{Z}$ splněna není (platí například $\mathbf{Z} \not\models \varphi[2, 1]$).

Řekneme, že formule φ je *logicky platná*, jestliže φ platí ve všech strukturách (pro příslušný předem zvolený jazyk). Například formule $\exists x(P(x) \to \forall y P(y))$ je logicky platná, protože v každé struktuře $\mathbf{D}$ pro jazyk $\{P\}$ lze proměnnou x ohodnotit tak, aby implikace $P(x) \to \forall y P(y)$ byla splněna: zvolíme-li jako hodnotu proměnné x takový prvek nosné množiny struktury $\mathbf{D}$, který není v realizaci symbolu P, pak implikace $P(x) \to \forall y P(y)$ je splněna díky tomu, že její předpoklad $P(x)$ splněn není, a pokud takový prvek zvolit nelze (protože symbol P je realizován celou nosnou množinou struktury $\mathbf{D}$), pak implikace $P(x) \to \forall y P(y)$ je splněna díky tomu, že je splněn její závěr $\forall y P(y)$ (a to bez ohledu na ohodnocení proměnné x).

Až potud je vše jasné, různí autoři se mohou lišit jen v terminologii (například místo "formule je splněna" nebo "formule platí" se někdy říká, že formule je *pravdivá*) nebo v řešení technických detailů. Tím jsme se dostali k oněm dvěma definicím vyplývání.

Definice 1 *Formule φ* vyplývá *z množiny formulí (předpokladů) Δ, jestliže φ je v každé struktuře $\mathbf{D}$ (pro příslušný jazyk) splněna každým ohodnocením proměnných, které v $\mathbf{D}$ splňuje všechny formule z Δ.*

Definice 2 *Formule φ* vyplývá *z množiny formulí Δ, jestliže φ platí ve všech strukturách (rovněž pro příslušný jazyk), ve kterých platí všechny formule z Δ.*

Pro symbolický zápis vyplývání se užívá opět znaménko $\models$. Zápis $\Delta \models \varphi$ tedy znamená, že formule φ vyplývá z množiny Δ.

Zapišme si pro lepší přehlednost podmínky v definicích 1 a 2 symbolicky. Definice 1 říká, že $\Delta \models \varphi$, t.j. že φ vyplývá z Δ, právě když

$$\forall \mathbf{D} \forall e(\forall \psi \in \Delta(\mathbf{D} \models \psi[e]) \Rightarrow \mathbf{D} \models \varphi[e]), \tag{1}$$

kdežto definice 2 říká, že $\Delta \models \varphi$, právě když

$$\forall \mathbf{D}(\forall e \forall \psi \in \Delta(\mathbf{D} \models \psi[e]) \Rightarrow \forall e(\mathbf{D} \models \varphi[e])), \tag{2}$$

což ještě lze ekvivalentně přepsat na

$$\forall \mathbf{D}(\forall \psi \in \Delta(\mathbf{D} \models \psi) \Rightarrow \mathbf{D} \models \varphi). \tag{2'}$$

Za kvantifikátorem $\forall \mathbf{D}$, který se vyskytuje shodně v (1) i v (2), následuje v (1) podmínka tvaru $\forall e(\mathcal{A}(e) \Rightarrow \mathcal{B}(e))$, kdežto v 2 podmínka tvaru $\forall e \mathcal{A}(e) \Rightarrow \forall e \mathcal{B}(e)$. Z toho je zřejmé, že definice 2 je širší v tom smyslu, že cokoliv vyplývá podle definice 1, pak to vyplývá i podle definice 2.

Když formule ψ neobsahuje volné proměnné, pak ψ je v $\mathbf{D}$ splněna některým ohodnocením proměnných, právě když ψ je v $\mathbf{D}$ splněna každým ohodnocením proměnných, a to je právě když ψ v $\mathbf{D}$ platí. To znamená, že neobsahuje-li žádná formule z Δ volné proměnné, pak podmínka $\forall \psi \in \Delta(\mathbf{D} \models \psi[e])$ nezávisí na volbě ohodnocení e, a je tedy ekvivalentní s podmínkou $\forall \psi \in \Delta(\mathbf{D} \models \psi)$. Formulím neobsahujícím volné proměnné se říká *sentence.* Z předchozí úvahy je vidět, že neobsahuje-li množina Δ jiné formule než sentence, definice 1 a 2 jsou spolu ekvivalentní, protože podmínka v definici 1 se zjednoduší na $\forall e(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}(e))$ a podmínka v definici 2 se zjednoduší na ekvivalentní tvar $\mathcal{A} \Rightarrow \forall e \mathcal{B}(e)$.

Formule $P(x)$ platí ve struktuře $\mathbf{D}$, právě když všechny prvky nosné množiny struktury $\mathbf{D}$ jsou zároveň prvky realizace symbolu P, a to je právě tehdy, když v $\mathbf{D}$ platí formule $\forall y P(y)$. Podle definice 2 tedy formule $\forall y P(y)$ vyplývá z množiny $\Delta = \{P(x)\}$. Podle definice 1 ale formule $\forall y P(y)$ z množiny $\Delta = \{P(x)\}$ nevyplývá, protože lze zvolit strukturu $\mathbf{D}$ a ohodnocení proměnných, které v $\mathbf{D}$ splňuje předpoklad $P(x)$ a nesplňuje formuli $\forall y P(y)$: stačí ve struktuře $\mathbf{B}$ z obrázku 1.2.1 proměnnou x ohodnotit prvkem b. Definice 1 a 2 tedy v obecném případě, kdy předpoklady v množině Δ mohou obsahovat i volné proměnné, nejsou ekvivalentní.

Hlavní výhoda definice 2 se ukáže tehdy, zabýváme-li se nějakým kalkulem a chceme-li dokázat jeho korektnost vůči sémantice klasické predikátové logiky. *Logický kalkulus* je dán volbou *(logických) axiomů* a *odvozovacích pravidel.* V logické literatuře lze nalézt spoustu nejrůznějších kalkulů pro různé logiky. Přitom nepominutelnou skupinu tvoří tzv. *hilbertovské kalkuly*, pro které je typický větší počet logických axiomů a malý počet dvou nebo tří odvozovacích pravidel, mezi nimiž je pravidlo *modus ponens.* Je-li zvolen kalkulus, je tím zároveň definována relace $\Delta \vdash \varphi$. Zápis $\Delta \vdash \varphi$ čteme “formule φ je *dokazatelná* z (množiny předpokladů) Δ". Věta o (silné) korektosti pro daný kalkulus tvrdí, že z žádné množiny předpokladů nelze dokázat žádné nežádoucí formule (nežádoucí vzhledem k nějaké sémantice). Zvolíme-li definici 2 za definici vyplývání, pak věta o korektnosti bude mít obzvláště přehledný tvar. Lze totiž dokázat, že

$$\textit{Když } \Delta \vdash \varphi, \textit{ pak } \Delta \models \varphi. \tag{3}$$

Zvolíme-li za definici vyplývání definici 1, pak podmínka (3) neplatí, protože formule $\forall y P(y)$ je v hilbertovských kalkulech dokazatelná z množiny $\{P(x)\}$, ale, jak už bylo řečeno, podle definice 1 z ní nevyplývá. Větu o korektnosti v tom případě musíme formulovat bez pojmu vyplývání: *když* $\Delta \vdash \varphi$, *pak* φ *platí ve všech strukturách, ve kterých platí všechny formule z* Δ.

Pevně zvolená množina předpokladů Δ je *axiomatická teorie.* Axiomatické teorie je běžné označovat velkými latinskými písmeny. Prvkům teorie T se říká *(mimologické) axiomy* teorie T. *Model* teorie T je struktura pro jazyk teorie T, ve které platí všechny formule z T. Přitom jazykem teorie T se myslí množina všech symbolů vyskytujících se ve formulích z množiny T. Větu o korektnosti můžeme přeformulovat pomocí pojmů model a teorie:

$$\textit{Když } T \vdash \varphi, \textit{ pak } \varphi \textit{ platí ve všech modelech teorie } T. \tag{4}$$

Podmínka (4) platí bez ohledu na to, zda za definici vyplývání zvolíme definici 1 nebo definici 2, protože v (4) není řeč o vyplývání. O podmínce (3) už víme, že platí pouze v případě přijetí definice 2. Můžeme ale dosáhnout toho, aby i při volbě definice 1 podmínka (3) platila alespoň pro teorie, a to tak, že budeme požadovat, aby mimologické axiomy axiomatické teorie neobsahovaly volné proměnné (tj. aby byly sentencemi).

Výhodou definice 1 je především to, že umožňuje snadno definovat vyplývání z formule a ekvivalentní formule: formule φ *vyplývá z formule* ψ, jestliže φ vyplývá z množiny $\{\psi\}$, a φ a ψ jsou *ekvivalentní*, jestliže φ vyplývá z ψ a zároveň ψ vyplývá z φ. V tom případě platí

$$\begin{array}{l}\textit{Formule } \varphi \textit{ vyplývá z } \psi, \textit{ právě když} \\ \psi \to \varphi \textit{ je logicky platná formule.}\end{array} \tag{5}$$

$$\begin{array}{l}\textit{Formule } \varphi \textit{ a } \psi \textit{ jsou ekvivalentní, právě když} \\ \varphi \equiv \psi \textit{ je logicky platná formule.}\end{array} \tag{6}$$

Zvolíme-li za definici vyplývání definici 2, pak podmínka (5) neplatí. Můžeme se ale rozhodnout, že bez pojmu vyplývání z formule se obejdeme a že podmínku (6) přijmeme jako definici, tj. že ekvivalentní formule budeme definovat bez pomoci vyplývání.

Můžeme tedy shrnout, že výhodou definice 2 je přehledný tvar věty o korektnosti vyjádřený podmínkou (3), který při přijetí definice 1 platí pouze pro teorie, pokud ovšem teorii definujeme jako množinu *sentencí*. Výhodou definice 1 je platnost podmínky (5), kterou lze považovat za žádoucí, neboť podmínka (5) platí ve výrokové logice. Požadavek, že axiomy axiomatické teorie musí být sentence, se jeví jako poměrně běžný a praktický: například v úvahách obsahujících užití věty o dedukci se pak nemusíme zmiňovat o jejích předpokladech. Také požadavek, aby platilo

Formule φ a ψ jsou ekvivalentní, právě když φ vyplývá z ψ a zároveň ψ vyplývá z φ. (7)

se jeví jako přirozený. A má-li platit (7) a (6), těžko lze souhlasit, že (5) lze oželet.

Podíváme-li se do literatury, zjistíme, že v [1] a v [5] je užita definice 1, kdežto v [6] je užita definice 2. V obsáhlé příručce [2] se s vyplýváním pracuje pouze v Barwisově Úvodu, a vystačí se tam s vyplýváním z množiny sentencí. Kniha [4] nemá v rejstříku termíny "theory" ani "consequence" a neužívá se v ní symbol $\models$. Autorita nad jiné povolaná, Alfred Tarski píše v [7], že máme-li určit, zda φ vyplývá z Δ, je třeba "nejprve utvořit množinu formulí Δ' a formuli φ' nahrazením mimologických konstant proměnnými, stejné stejnými a různé různými, modelem množiny Δ resp. formule φ je pak libovolná posloupnost objektů splňující všechny formule v Δ' resp. splňující φ', a konečně φ vyplývá z Δ, jestliže každý model množiny Δ je zároveň modelem formule φ". To by se dalo použít jako argument pro definici 1, ale úplně fér to není, protože (a) Tarski také uvažuje o vyplývání pouze z množiny sentencí, a (b) Tarski chápe šířeji než je dnes obvyklé termín "mimologická konstanta".

Zvlášť za zmínku stojí kniha [8]. To není kniha primárně o logice. Logice je v ní ale věnována jedna kapitola a užívá se tam definice 1. Této knihy si vysoce cením jako učebnice a přimlouvám se, aby byla také vzata v úvahu. V [8] je také užita pozoruhodná verze hilbertovského kalkulu, která vystačí pouze s jediným odvozovacím pravidlem modus ponens a která nedovoluje odvodit formuli $\forall y P(y)$ z předpokladu $P(x)$.

Kalkuly, v jejichž definici je zabudováno omezení na užití pravidla generalizace a které neumožňuje odvodit formuli $\forall y P(y)$ z předpokladu $P(x)$, se vyskytují i jinde než v [8], podrobnou diskusi a odkazy lze nalézt v [3]. Je pravda, že takové kalkuly jsou dnes méně běžné, ale pro to, aby nebyly zapomenuty, mluví mimo jiné následující argument srozumitelný čtenáři, který ví něco o modálních logikách. Odvozovací pravidlo $A \,/\, \Box A$ hraje v modální výrokové logice podobnou roli, jako pravidlo generalizace v predikátové logice. A existují rozumné a aplikovatelné modálně výrokové kalkuly, ve kterých je nutné přijmout omezení na užívání pravidla pravidlo $A \,/\, \Box A$.

Zdá se, že definice 2 má oporu především v knize [6]. Logik, který považuje knihu [6] za velmi důležitý, stručný a přehledný zdroj poučení, ale nikoliv za návod, jak *učit* logiku, bude pravděpodobně považovat definici 1 za užitečnější.

Literatura

[1] J. L. Bell, M. Machover, *A Course in Mathematical Logic*, North--Holland, 1997

[2] J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, 1977

[3] M. Jauris, *Omezená a neomezená odvoditelnost*, tento sborník

[4] Yu. I. Manin, *A Course in Mathematical Logic*, Springer 1977

[5] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand, 1964

[6] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967

[7] A. Tarski, *On the concept of logical consequence*, ve sborníku *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford 1956

[8] C. H. Papadimitriou, *Computational Complexity*, Addison–Wesley, 1994

Vítězslav Švejdar
Katedra logiky
Filozofická fakulta Univerzity Karlovy
Praha
E-mail: Vitezslav.Svejdar@cuni.cz

1.3 Logika v knihovnických systémech *Eva Techlová*

V knihovnických systémech i v jiných vyhledávacích službách jsou základními operacemi logické operace odvozené ze spojování výroků, zejména disjunkce, konjunkce, negace. Podstatná pro správné pochopení funkcí systému je výroková logika, logika tříd, ale i sémiotická a sémantická analýza slova a jeho významu, problematika jednoznačnosti a mnohoznačnosti, přisuzování, extenze a intenze i další oblasti logiky, např. logiky predikátové. Následující text chce ilustrovat, jak se tyto pojmy mohou promítat do běžné knihovnické praxe.

Podle Thomase Kuhna se věda historicky vyvíjí v etapách: období normální vědy se střídají s krizemi a revolučními obdobími. V obdobích normální vědy věda zaznamenává lineární, z hlediska metodologických a filozofických přístupů neproblematický vývoj. Tato "normálnost" je dána právě platností kuhnovského paradigmatu: komplexní teorií, sjednocením množiny principů, které dodává vědecké disciplíně nebo integrované vědní oblasti celistvého charakteru. Příkladem může být Mendělejevova tabulka v chemii. V období platnosti paradigmatu ovšem narůstají problémy, v rámci daného paradigmatu neřešitelné. Nakonec dochází ke krizi a nastupuje tzv. revoluční období, kdy se utvářejí a mezi sebou soupeří nová paradigmata. V případě, že se jedno nebo i více konstituuje, nastává nové období normální vědy. Kuhnovské informační paradigma, ovládající vědu od 60. let, se zdá být zcela překonáno. Systematizace a strukturalizace informací jako poznávací princip zřejmě ustupuje ve prospěch celostních poznávacích aktů, v kognitivní vědě formulovaných jako holistická pojetí celých "situací". Pro lepší porozumění informačním systémům je např. důležitá odpověď na sémantickou otázku, lze-li se tázat po významu věty a skládat významy jednotlivých vět do významu promluvy, nebo naopak hledat význam promluvy pouze jako intencionálního celostního aktu. Základním kognitivním procesem je zde totiž přiřazování a zkoumání významů slov či slovních spojení, která zastupují dokumenty. Kombinovat klíčová slova např. v uživatelském dotaze tak, aby celistvě reprezentovala význam dokumentu jako logicky uzavřený celek, je zřejmě velmi obtížné, ne-li nemožné. Z toho plyne, že informační paradigma má svůj okruh působnosti, kde překonáno být nemůže: oblast informačních systémů. Jejich smyslem a cílem, základem celé jejich existence, je právě sběr, pořádání, zpracování a vyhledávání informací (existence Internetu nás nutí přidat k tomuto klasickému výčtu slovo "objevování"). Typické jsou zde automatizované knihovnické systémy a sítě a vyhledávací služby na Internetu, které jsou založeny právě na strukturalizaci: dokument jako tématický celek se rozkládá na své prvky – dílčí témata, celý dokument i jeho dílčí témata se reprezentují zástupnými znaky (selekčními údaji, převážně předmětovými hesly či klíčovými slovy), což jsou prvky, určené ke skládání a kombinování podle informačního požadavku. Uživatel volí a prohledává reprezentativní selekční znaky, které podle jeho názoru odpovídají jeho informační potřebě.

Kolik je příležitostí k chybám, lhostejno, zdali jde o automatizované nebo tradiční informační systémy, budu demonstrovat na příkladu z praxe knihovnického automatizovaného systému: ilustruje totiž určitý pocit rozpaků a bezmocnosti, který se někdy při vyhledávání dostavuje. To se týká i Internetu, a z různých důvodů zejména Internetu a služeb vyhledávajících z plných textů podle klíčových slov.

Uveďme na jedné straně uživatelský rešeršní dotaz a na druhé straně knihu, která je tomuto dotazu relevantní až pertinentní, kterou však uživatel nezná.

Jakými myšlenkovými postupy se může přiblížit uživatel komplexnímu znaku (kombinaci klíčových slov, předmětovým heslům), který jako relevantní knize přidělil indexátor, a čím jsou tyto myšlenkové postupy vyvolány?

Maximálním prostorem pro vyhledávání je disjunkce všech relevantních selekčních údajů (např. klíčových slov) z celé databáze. Minimálním pak disjunkce klíčových slov, které svému informačnímu požadavku přidělil uživatel. V této disjunkci uživatel vyhledává, při čemž rozsah a obsah databázové disjunkce nemůže znát.

Informační potřeba obvykle vychází z nějaké konkrétní situace: v příkladu, který uvádím, jde o uživatele-knihovníka, který stojí před úkolem automatizovaného zpracování speciálních dokumentů v automatizovaném knihovnickém systému Tinlib. Při tom naléhavou informační potřebu může vytvářet např. situace, kdy knihovna s knihovnickým systémem Tinlib dostala darem kolekci sborníků z konferencí, na jejichž uvolnění čtenáři naléhají.

Lze soudit, že tento uživatel formuluje rešeršní vzorec tak, jak mu jej napovídá situace. Svou informační potřebu pojmenuje pojmy, aktivovanými v jeho vědomí právě aktuální situací: slova počítač - speciální dokumenty - identifikační popis - konference - automatizované knihovnické systémy - Tinlib.

Monografii s názvem "Využívání počítačů k bibliografickému popisu ve vaší knihovně", v níž by čtenář našel příklad popisu konferenčních materiálů, byly přiděleny tyto věcné třídící znaky: klíčová slova - výrazy tezauru: katalogizace - knihovnické materiály - klasifikace - počítačový software - automatizovaná katalogizace - automatizace knihoven - bibliografický popis. Klíčová slova z názvu: Využívání - počítače - knihovna.

Výsledek srovnání uživatelského dotazu a klíčových slov přidělených knize pak je: ve výrazech tezauru - nulová shoda v klíčových slovech z názvu - shoda ve výrazu "počítač".

Pod klíčovými slovy svého rešeršního dotazu uživatel pravděpodobně najde několik vhodných dokumentů, avšak kniha, kterou jsme popsali a označili jako relevantní, mezi nimi asi identifikována nebude: je k nalezení pouze pod klíčovým slovem "počítač". Bude-li uživatel prohledávat záznamy pod tímto klíčovým slovem, (kterých však bude velmi mnoho) objeví pravděpodobně nejprve její název, tedy "Využívání počítačů k bibliografickému popisu ve vaší knihovně". Identifikuje jej však uživatel jako relevantní? *Nikoliv*, pokud bude prohlížet pouze názvy dokumentů, *ano*, pokud si prohlédne úplný záznam knihy "Vyžívání počítačů ve vaší knihovně". Objeví totiž znaky "automatizovaná katalogizace" a "bibliografický popis", které poskytují silnou indicii, že obsah knihy bude odpovídat uživatelově potřebě zjistit, jak popisovat v automatizovaném systému konferenční materiály na počítači.

Může však nastat i jiná situace, dosti typická pro internetovské vyhledávací služby: pod klíčovým slovem "počítač" se objeví velmi rozsáhlý soubor adres, který si bude uživatel chtít omezit nějakou konjunkcí. Zkombinuje tedy "počítač" s jiným klíčovým slovem, které často bude muset volit bez jakékoliv nápovědy. I zde jsou poměrně omezené možnosti, že se "strefí": systémy vytvářející automaticky indexy procházejí často jen názvy, hlavní stránky, případně odkazy, a potom by se obě zvolená klíčová slova musela objevit právě v těchto částech webovských dokumentů.

Ovšem např. program Altavista zvolí jako index každé slovo z plného textu dokumentu, které identifikuje jako slovo, tj. indexem je znakový řetězec, oddělený od dalšího interpunkčním znaménkem či mezerou (příp. formátovacími znaky). Zde je potenciálně největší naděje na úspěšné vyhledání, ovšem termíny, které uživatel volí, se budou muset shodovat s termíny, které užívá autor ať již webovské stránky či hypertextu. (Zvolí -li např. knihovník z našeho příkladu zastaralý termín “identifikační popis”, kniha se v konjunkci neobjeví zcela jistě ani v knihovnických systémech, ani ve vyhledávacích službách.)

Aby se uživatel dostal k dokumentu, který je relevantní a který reálně existuje, je nutné, aby nyní udělal takový myšlenkový krok, který uvolní jeho původní představu vyjádřenou klíčovými slovy počítač - speciální dokumenty - identifikační popis - konference.

Toto odpoutání od původní představy by mohlo být obtížné: uživatel je jednak fixován na svoji konkrétní situaci, která mu napověděla klíčová slova dotazu, jednak je ovlivněn svým odborným vzděláním, které ho, alespoň v našich současných podmínkách, zřejmě přidrží u zastaralého termínu “identifikační popis”, což je název předmětu, vyučovaného všemi knihovnickými školami v Čechách.

Aby se však uživatel dostal k cíli, musí svůj rešeršní vzorec upravit tak, aby se dostal do oblasti výrazů, které knize přidělil buď u intelektuálně indexujících systémů klasifikátor, nebo u indexací z plných textů autor.

Informační bariéru, která by mohla vzniknout fixací na původní volbu klíčových slov, lze překonat asi těmito třemi způsoby:

1. přechodem na vyšší úroveň obecnosti – např. z “identifikačního popisu” na “klasifikaci”;
2. hledáním synonym, asociovaných výrazů, případně i výrazů podřízených nově nalezeným výrazům – např. k výrazu “počítač” by mohl uživatel nalézt výraz “automatizace knihoven”;
3. hledáním názvu oboru (v tomto případě asi “knihovnictví”).

Klíčovými místy, v nichž se rozhodovalo, zda uživatel najde knihu ”Využívání počítačů pro bibliografický popis ve vaší knihovně” v automatizovaném knihovnickém systému, zřejmě bylo:

1) rozhodnutí k vyhledávání pod v této souvislosti značně nejasným slovem “počítač”; 2) rozpoznání možnosti, že požadované téma může být pod názvem ”Využívání počítačů pro bibliografický popis ve vaší knihovně”; 3) otevření bibliografického záznamu a prohlédnutí si příslušných selekčních údajů, nebo rozhodnutí k novému vyhledávání pod

jinými selekčními údaji. Zde je možno nahradit zastaralý “identifikační popis” synonymním “bibliografickým popisem” nebo podřadit logickou třídu “automatizované knihovnické systémy” třídě “automatizace knihoven”.

Je zřejmé, že se jedná o dosti náročný intelektuální proces. Z praxe je známo – a i informační teorie došla k názoru –, že nevede k cíli snažit se o nadřazenost ve smyslu silné hierarchie jako u MDT. Účelnější je řídit se hierarchií slabou a spíše asociovanou, postavenou na praktickém a zkušenostním hledisku. Takto uvolněné uvažování odpovídá více přirozenému způsobu myšlení a je více intuitivní a méně systematické. (Např. klasifikační systém Yahoo nemá klasickou silně hierarchickou strukturu. Vzdor tomu je vyhledávání podle třídění systémem Yahoo snadnější a přesnější než podle systému Altavista: tento systém totiž aktivně ukazuje čtenáři selekční údaje včetně vazeb podřízenosti, a tím výrazně pomáhá jeho paměťovým procesům: tj. uživatel buďto nabízený selekční údaj přijme, nebo si na podnět, kterým je pro něho nabízený selekční údaj, aktivně vzpomíná na další možná klíčová slova.)

Není dosud zcela vysvětleno, kdy si člověk vzpomene na nějaký předmět, děj, situaci, tj. kdy, jakým způsobem, a na jaký podnět se vyhledají v paměti odpovídající reprezentativní struktury a aktivují se. Tyto struktury se pak mohou rozvinout v sémantické řetězce, nebo mohou vyvolat v jiných oblastech paměti struktury podobné (transfer).

Zde je třeba si uvědomit rozdíl mezi dvěmi základními kategoriemi vybavování si z paměti: vzpomínkou a rozpoznáním (= znovurozpoznáním).

Rozpoznání (identifikace) vyžaduje pojmový pokyn - vyslovení nebo přečtení slova nebo vnímání jiného znaku (např. obrazu). Po tomto podnětu následuje vyhledání a lokalizace odpovídající či analogické kognitivní struktury ve vědomí - jednotky kognitivní reprezentace (jednotka kognitivní reprezentace se definuje jako ”nejazyková kognitivní struktura v paměti subjektu, v níž jsou na základě zkušenosti reprezentovány typické souvislosti určitého okruhu reality”), která odpovídá podnětovému slovu, a kontrola, zda tato struktura je adekvátní podnětu. Vzpomínka je oproti rozpoznání širší o obtížný počáteční krok: nejprve je nutno generovat kandidáta správného pojmu, a to z vlastní paměti, bez podnětu z okolí. Pak teprve následuje proces, ve kterém se stává kandidát na správný pojem pojmovým pokynem a probíhá stejný proces jako při předchozí identifikační variantě: vyhledá a lokalizuje se kognitivní struktura (jednotka kognitivní reprezentace) spojená se slovem a zkontroluje se, odpovídá-li podnětové situaci (analogicky podle Monsell 1981).

Příklad na rozpoznání: "Slyšel jsi včera při přednášce slovo kognitivní struktura?"

Příklad na vzpomínku: "Které slovo bylo ústředním pojmem včerejší přednášky?"

Teorie rozpomínání se a vzpomínání podle mého názoru přispívá k vysvětlení, proč, ačkoliv je na Internetu "všechno", trvá hodiny a hodiny, nežli najdeme materiály relevantní předem stanovenému konkrétnímu tématu. Musíme totiž aktivně vzpomínat na své vědomosti, a z nich extrahovat a vhodně použít pojmy, které dokumentu přidělila databáze. Naopak surfování je velmi snadné: při surfování není nutné na něco vzpomínat či rozpomínat se, postupujeme naprosto plynule. To lze zřejmě vysvětlit takto: webovské stránky jsou vlastně klasifikačními soustavami, ovšem tyto klasifikační soustavy nepoužívají formalizace vlastní selekčním jazykům, jsou opřeny o přirozený jazyk v té míře, že jsou buď úplně, nebo do značné míry plynulým textem - hypertextem. Indexy jsou zde významově přesné, hypertextové odkazy totiž formuluje autor sám přesně podle obsahu textu, který budou indexy reprezentovat a podle souvislostí a konotací, v nichž se klíčové slovo nalézá. Hypertextový odkaz může být i dlouhým souslovím, spíše než klíčovým slovem předmětovým heslem, a může tak zachytit vztahy uvnitř selekčního znaku. Zejména však přispívá ke správnému pochopení významu označovaných textů, že lze v případě potřeby používat v plné míře gramatiky a že webovská stránka ukazuje okolní text, a může tedy využít zpřesnění, které k podchycení vztahů mezi slovními znaky poskytuje přirozenému jazyku gramatika. Kromě toho je kolem klíčového slova viditelně i okolní text, což zviditelňuje také souvislosti a konotace klíčového slova. To značně přispívá k dobrému porozumění. Webovská stránka tak může přejmout bohatost, přesnost a sdělnost vyjadřovacích prostředků přirozeného jazyka, což ji činí mnohem sdělnější ve srovnání s formalizovanými klasifikačními systémy, např. MDT. Klasické klasifikační soustavy, vytvořené pro pořádání informací, odstraňují synonymii, homonymii, rozkládají ustálená rčení, zjednodušují morfologii slov - např. sjednocují množné číslo na jednotné, upravují koncovky apod., zejména však nepoužívají buď vůbec, nebo jenom zjednodušené gramatiky. Webovská stránka není vytvořena pro pořádání, ale proto, aby podala zprávu. Klasifikačních funkcí nabývá druhotně, a protože není konstruována jako třídící soustava, má z hlediska vyššího informačního systému, jehož je prvkem, např. vyhledávací služby, známé nedostatky – je těžko přístupná z vnějšku.

Eva Techlová
Ústav informačních studií a knihovnictví
Filozofická fakulta Univerzity Karlovy
Praha
E-mail: techlove@ff.cuni.cz

1.4 Omezená a neomezená odvoditelnost *Miroslav Jauris*[2]

1.4.1 Problém

Mějme tvrzení

(i) $\underbrace{\mathbf{m} \cup \{A\} \vdash B}_{(a)}$, právě když $\underbrace{\mathbf{m} \vdash (A \to B)}_{(b)}$,

Relace odvoditelnosti, zde značená "$\vdash$", je někdy definována tak, že toto tvrzení platí (srv. například *Kleene, Matěmatičeskaja logika*, [7], 133, 134), někdy je odvoditelnost definována tak, že v této jednoduché podobě neplatí. Když je $\vdash$ definováno tak, že tvrzení (i) platí, potom

(ii) abychom se ujistili, že (b), stačí ujistit se, že (a),

což je direktiva velmi často užívaná v praxi. Pokud je $\vdash$ definováno tak, že (i) neplatí, použití direktivy (ii) - jakkoli se zdá být přirozenou - může překvapit zjištěním, že z $\mathbf{m}$ lze odvodit spor, ačkoli je $\mathbf{m}$ splnitelná množina. Příkladem definice odvoditelnosti, která nedovoluje použít bez dalšího použít direktivu (ii), protože neplatí (i), je *Mendelsonova* definice relace $\vdash$ (*Vveděnije v matěmatičeskuju logiku*, [9], 36, 37, 38, 65, 66).[3] Kdo by nedopatřením akceptoval direktivu (ii) ale pak by sestrojoval odvození jak je definuje *Mendelson*, mohl by ze splnitelné množiny premis, řekněme množiny $\{Pa, \neg Pb\}$, odvodit spor. Důležité v této souvislosti je, že podle *Mendelsonovy* definice relace $\vdash$ platí pro každou proměnnou x a každou formuli A: $\{A\} \vdash \forall x A$. Podobné pravidlo je ovšem blízké matematikovi, který pracuje téměř výlučně s formulemi dokazatelnými v dané matematické teorii. Není již tak blízké učiteli, který zadává žákům úlohu odvozovat z premisy "$a^2 - 6a + 8 = 0$". *Mendelson* by také potřeboval pro odvozování v praxi cosi jako direktivu (ii). Ekvivalenci (i) (a pak také (ii)) však musí omezit jistou podmínkou, nebo - což by bylo totéž - definovat odpovídající novou, užší relaci $\vdash'$. Oproti tomu to, co *Kleene* definuje jako svou relaci $\vdash$, už je ona užší relace odvoditel-

[2]Tento příspěvek vznikl s podporou grantu GA ČR 401/98/0382 Alternativy klasické logiky.

[3]Vědomě zde stíráme některé nepodstatné rozdíly. Oba zmiňovaní autoři totiž používají ekvipotentní soubory logických axiómů a pravidel. Ani okolnost, že $\mathbf{m}$ je u *Kleena* konečná, není z hlediska našeho problému podstatná.

nosti. [4] Vysvětlení je tedy prosté: jedni logikové rozumějí odvoditelností (důkazem z předpokladů) relaci, kterou nazýváme omezenou odvoditelností (tak překládáme německý termín , a jiní jinou, odlišnou relaci, kterou nazýváme neomezenou odvoditelností (*unbeschränkte Ableitbarkeit"*) , srv. *K. Schröter* [13], aniž by výslovně upozornili na víceznačnost slova "odvoditelný". Oni prostě spoléhají, že čtenář bude pozorně číst jejich definice. Autor pojednávající o odvoditelnosti by ovšem mohl vyjít méně pozornému čtenáři vstříc, upozornit výslovně na víceznačnost slova "odvoditelný" a případně místo víceznačného výrazu

A je odvoditelné z $\mathbf{m}$	tj. $\mathbf{m} \vdash A$	tj. $A \in Cn\mathbf{m}$

použít některý z jednoznačných výrazů

A je omezeně odvoditelné z $\mathbf{m}$	tj. $\mathbf{m} \vdash^{\mathcal{O}} A$	tj. $A \in Cn^{\mathcal{O}}\mathbf{m}$
A je neomezeně odvoditelné z $\mathbf{m}$	tj. $\mathbf{m} \vdash^{\mathcal{N}} A$	tj. $A \in Cn^{\mathcal{N}}\mathbf{m}$

1.4.2 Vlastnosti společné relacím odvoditelnosti

A. Tarski [15], I. §1, nalezl některé charakteristické vlastnosti relace odvoditelnosti, které se staly široce známými a které uvádíme níže v podobě, jaká je dnes obvyklá. Čtenář, který je zná, může nabýt mylného dojmu, že tento soubor vlastností může mít jen jediná relace odvoditelnosti. To pak může přispět k přehlédnutí skutečnosti, že jedni autoři označují slovem "odvoditelnost" jinou relaci než jiní autoři.[5]

(a) Jestliže z **a** je odvoditelné (vyplývá) **b**, pak **a** je množina formulí a **b** je formule,

Nechť **m** je množina formulí a A, B jsou formule. Pak platí:

(b) jestliže A patří do množiny formulí **m**, pak z **m** je A odvoditelné (vyplývá),

(c) jestliže $\mathbf{m} \subseteq \mathbf{n}$ a A je odvoditelná (vyplývá) z **m**, pak A je odvoditelná (vyplývá) z **n**,

[4] Neboť od odvození z množiny **m** (což je posloupnost formulí) požaduje, aby všechna užití generalizujících pravidel předcházela prvnímu užití formule patřící do **m**. Pak ovšem (i) platí bez jakýchkoli podmínek.

[5] Ostatně sám *Tarski* píše: "Diese Schlussregeln festzustellen und mit ihrer Hilfe *den* Begriff der Folgerung exakt zu definieren, bildet wiederum eine Aufgabe von speziellen Metadisziplinen; ..." (kurzíva od MJ).

(d) jestliže $\mathbf{n}$ je množina všech formulí odvoditelných (vyplývajících) z $\mathbf{m}$, a z $\mathbf{n}$ je odvoditelná (vyplývá) formule A, pak z $\mathbf{m}$ je odvoditelná (vyplývá) formule A.

(e) je-li A odvoditelná (vyplývá) z $\mathbf{m}$, je odvoditelná (vyplývá) i z některé konečné podmnožiny množiny $\mathbf{m}$.

Tyto vlastnosti (a)–(e) jsou tedy společné relacím odvoditelnosti i relaci vyplývání.

Kdybychom si množinu formulí odvoditelných v nějakém pevně daném kalkulu z $\mathbf{m}$, ať již omezeně či neomezeně, označili $Cn\mathbf{m}$, mohli bychom tvrzení (b)–(e) zapsat:

(b′) $\mathbf{m} \subseteq Cn\mathbf{m}$,

(c′) jestliže $\mathbf{m} \subseteq \mathbf{n}$, pak $Cn\mathbf{m} \subseteq Cn\mathbf{n}$,

(d′) $CnCn\mathbf{m} \subseteq Cn\mathbf{m}$,

(e′) jestliže $A \in Cn\mathbf{m}$, pak existuje konečná množina $\mathbf{n}$ taková, že $\mathbf{n} \subseteq \mathbf{m}$ a $A \in Cn\mathbf{n}$.

Z (b′)–(d′) lze odvodit další tvrzení. Například

(f′) $Cn(\mathbf{m} \cup Cn\mathbf{k}) = Cn(\mathbf{m} \cup \mathbf{k})$,

(g′) $Cn(Cn\mathbf{m} \cup Cn\mathbf{k}) = Cn(\mathbf{m} \cup \mathbf{k})$,

(h′) $CnCn\mathbf{m} = Cn\mathbf{m}$.

Intuitivně, tvrzení A je z množiny tvrzení $\mathbf{m}$ *odvoditelné*, když se dá dojít k A takovým postupem, kdy píšeme po řadě tvrzení, která buď platí logicky nutně nebo jsou to premisy (tvrzení z $\mathbf{m}$) nebo je lze získat z těch, které už máme napsány, a to nějakým jednoduchým úsudkem, který lze ale také popsat ryze syntakticky; to jest tak, že popíšeme tvar závěru tohoto úsudku v závislosti na tvaru použitých předchozích výrazů. Oproti tomu A *vyplývá* z $\mathbf{m}$, když, zhruba řečeno, to, co říká A, lze vyrozumět z $\mathbf{m}$. Čili když to, co je řečeno v A, je obsaženo v tom, co je řečeno v $\mathbf{m}$. Již zde lze v náznaku vidět, jak se odliší odvoditelnost a vyplývání: důkaz odvoditelnosti spočívá v předložení jakéhosi písemného dokladu jakoby se slovy: “Tak se přesvědč!” V ideálním případě: “Tak použij *algoritmus* rozhodnutí, zda je tenhle doklad odvození.”

Následující vlastnost nepřísluší relaci vyplývání, ale přísluší dalším relacím: relaci omezené odvoditelnosti a relaci neomezené odvoditelnosti.

(i) Lze zavést pojmy kalkulu a odvození A z $\mathbf{m}$ v daném kalkulu takové, že

– tvrzení “z $\mathbf{m}$ je odvoditelné A” bude ekvivalentní tvrzení “existuje odvození A z $\mathbf{m}$ v daném kalkulu”,

– pro každou rozhodnutelnou množinu $\mathbf{m}$ a libovolnou formuli A bude množina všech odvození A z $\mathbf{m}$ v daném kalkulu rozhodnutelná.

Velmi dobře známá operace Cn spolu s běžnými pojmy teorie množin je tedy schopna odlišit odvoditelnost a vyplývání, ale není schopna odlišit omezenou a neomezenou odvoditelnost.

1.4.3 Uzávěr dané množiny danými relacemi

K odlišení omezené a neomezené odvoditelnosti můžeme použít některé pojmy známé z teorie množin jako pojmy týkající se prvků *in abstracto* a pak je užít *in concreto* na případ, kdy prvky jsou formule.

O množině $\mathbf{m}$ se říká, že je uzavřena vzhledem k relaci $\mathbf{r}$ (řekněme, že je j-členná), když platí pro všechny prvky $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j$: patří-li uspořádaná j-tice $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j)$ do $\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}$ patří do $\mathbf{m}$, pak také $\mathbf{a}_j$ patří do $\mathbf{m}$. Nechť $\mathbf{u}$ je jakákoli množina, $\mathbf{m}$ její podmnožina a $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ nechť jsou relace v $\mathbf{u}$. Uzávěr množiny $\mathbf{m}$ relacemi $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ v $\mathbf{u}$, symbolicky: $Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{m}$ definujeme takto:

(∗) prvek $\mathbf{a}$ patří do $Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{m}$, právě když $\mathbf{a}$ patří do každé množiny $\mathbf{k}$ obsahující množinu $\mathbf{m}$ a uzavřené vzhledem k relacím $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$.

Lze dokázat (srv. s (b')–(h')):

(b″) $\mathbf{m} \subseteq Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{m}$,

(c″) jestliže $\mathbf{m} \subseteq \mathbf{n}$, pak $Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{m} \subseteq Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{n}$,

(d″) $Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{m} \subseteq Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{m}$,

(e″) jestliže $\mathbf{a} \in Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{m}$, pak existuje konečná množina $\mathbf{n}$ taková, že $\mathbf{n} \subseteq \mathbf{m}$ a $\mathbf{a} \in Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{n}$.

Lze ovšem odvodit i další věty o uzávěru, například věty, které budou často využity v dalším textu:

(f″) $Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}(\mathbf{m} \cup Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{k}) = Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}(\mathbf{m} \cup \mathbf{k})$,

(g″) $Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}(Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{m} \cup Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{k}) = Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}(\mathbf{m} \cup \mathbf{k})$,

(h″) $Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{m} = Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{m}$.

1.4.4 Kalkuly

V logice se zavádí pojem dokazatelnosti a odvoditelnosti až na základě definice kalkulu:

– definuje se rozhodnutelná množina formulí $\mathcal{F}$ (zde se omezujeme na predikátovou logiku prvního řádu; není důležité, zda je to logika s funktorovými symboly ani zda je to logika s identitou),
– definuje se nějaký kalkul $\mathcal{K}$ pro $\mathcal{F}$; buď kalkul hilbertovský (čili kalkul produkující posloupnosti formulí), nebo kalkul přirozené dedukce (kalkul produkující posloupnosti bolzanovských sekventů, čili, v naší notaci, posloupnosti slov tvaru $A_1A_2 \ldots A_n \therefore A$, kde $n \geq 0$), kalkul gentzenovský (kalkul produkující posloupnosti gentzenovských sekventů, čili, v naší notaci, posloupnosti slov tvaru $A_1A_2 \ldots A_n \star B_1B_2 \ldots B_k$, kde $n \geq 0$ a $k \geq 0$) apod.

Náš další výklad se bude týkat hilbertovských kalkulů predikátové logiky prvního řádu. V obvyklém výkladu o kalkulech jiného druhu problém dvojího pojetí odvoditelnosti nevyvstává.

1.4.5 Obecný pojem hilbertovského kalkulu. Dva druhy pravidel.

Za základ dalšího výkladu vezmeme třeba tento hilbertovský kalkul *en* (*Endertonův* [2]). Základní produkovatelná slova (logické axiómy) kalkulu jsou

(a) všechny formule predikátové logiky, které lze získat z tautologických formulí výrokové logiky dosazením,
(b) všechny formule tvaru
 (b_1) $(\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \forall xB))$,
 (b_2) $(A \rightarrow \forall xA)$ když x není volná v A,
 (b_3) $(\forall xA \rightarrow^x_t A)$, kde $^x_t A$ je výsledek dosazení termu t za x v A a toto dosazení je přípustné (žádný dosazený výskyt termu t nebude vázaný). "x" je proměnná za proměnné "a_1", "a_2", atd. Je to tedy syntaktická proměnná.

Základní pravidla produkce (produkující relace) jsou:

– pravidlo odloučení, *odl*, čili relace, do které patří trojice formulí (C, D, E), právě když C je formule $(D \rightarrow E)$ nebo D je formule

$(C \to E)$; což vyjadřujeme také slovy: "E lze získat odloučením z C a D"; značí se obvykle

$$\frac{(A \to B), A}{B} \qquad \text{nebo} \qquad A\,, (A\ \to B) \implies B,$$

– pravidlo generalizace, gen, čili relace, do které patří dvojice (C, D), právě když D má tvar $\forall x C$; což vyjadřujeme také slovy "D lze získat z C generalizací"; značí se obvykle

$$\frac{A}{\forall x A} \qquad \text{nebo} \qquad A \implies \forall x A.$$

Vše, co dále uvedeme, bude platit i poté, co přidáme skupinu (c), axiómy identity. **ax** budiž množina všech logických axiómů. Níže citované definice důkazu a odvození budeme vztahovat ke kalkulu en, i když původně je některý níže zmiňovaný autor definice vztahoval k jinému, ale ekvipotentnímu hilbertovskému kalkulu. Místo "důkaz v en", "dokazatelné v en", "odvození v en", "odvoditelné v en" budeme nadále psát jen "důkaz", "dokazatelné", "odvození", "odvoditelné". Důkaz metajazykového tvrzení si jistě nebudeme plést s důkazem v kalkulu en, což je vždy důkaz formule.

Obecněji, hilbertovský kalkul je čtveřice ($\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$), kde $\mathcal{F}$ je množina všech formulí, $\mathcal{L}$ je množina základních produkovatelných formulí čili axiómů kalkulu, a $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ je množina základních produkujících relací; přitom $\mathcal{R}_1$ je množina pravidel, která "přenášejí splněnost" a tedy i "tautologičnost", kdežto $\mathcal{R}_2$ je množina pravidel, která "přenášejí tautologičnost ale ne splněnost".

Přesné definice těchto pojmů lze vyslovit pouze v sémantice. Interpretací rozumíme každou trojici (U, I, V), stručněji UIV, kde U je neprázdná množina tak zvaných individuí, I je zobrazení, jehož obor tvoří množina jmenných, predikátových a funktorových symbolů a které přiřazuje každému symbolu individuum, pokud je to symbol jmenný, n-člennou relaci v U, pokud je to n-místný predikátový symbol $(n > 0)$, a n-argumentovou funkci v U, pokud je to n-místný funktorový symbol $(n > 0)$. Známým způsobem je pak definována pravdivostní hodnota formule A v interpretaci UIV, symbolicky: $UIV[A]$. Místo "pravdivostní hodnota formule A v UIV je pravda" píšeme také "UIV splňuje formuli A". Často je V fiktivní argument. Pak místo "interpretace UIV" smíme psát "interpretace (struktura) UI".]

Nechť $\mathbf{r}$ je j-členná produkující relace v množině formulí čili pravidlo produkce. Relace $\mathbf{r}$ přenáší splněnost tehdy a jen tehdy, když pro každé $A_1, \ldots, A_j$ takové, že $(A_1, \ldots, A_j) \in \mathbf{r}_j$, platí:

> pro každou interpretaci UIV platí: jestliže splňuje formule $A_1, \ldots, A_{j-1}$, pak splňuje i A_j.

Relace $\mathbf{r}$ přenáší tautologičnost tehdy a jen tehdy, když pro každé formule $A_1, \ldots, A_j$ takové, že $(A_1, \ldots, A_j) \in \mathbf{r}_j$, platí:

> jestliže pro každou interpretaci UIV platí, že splňuje formule $A_1, \ldots, A_{j-1}$ (čili jestliže $A_1, \ldots, A_{j-1}$ jsou tautologické formule), pak pro každou interpretaci UIV platí, že splňuje formuli A_j (čili pak A_j je tautologická formule).

Tedy například *gen* přenáší tautologičnost, ale, jak se čtenář snadno ujistí nalezením vhodného příkladu, nepřenáší splněnost. Pravidlo *odl* přenáší splněnost, a tedy ovšem i tautologičnost.

V kalkulu *en* tedy

– $\mathcal{R}_1 = \{odl\}$,

– $\mathcal{R}_2 = \{gen\}$,

1.4.6 Dva pojmy odvoditelnosti.

V rozporu s pojetím mnohých čtenářů zdůrazňujeme: je-li nadefinován kalkul, jak jsme to právě učinili, není tím dán pojem odvoditelnosti. Naopak, nad jedním a týmž hilbertovským kalkulem mohou být definičně zavedeny různé relace odvoditelnosti.

Nyní můžeme definovat dokazatelnost formule A v kalkulu *en*, omezenou odvoditelnost A z $\mathbf{m}$ v kalkulu *en* a neomezenou odvoditelnost A z $\mathbf{m}$ v kalkulu *en*. Přitom máme dvě možnosti: můžeme je definovat s pomocí množinově-teoretického pojmu operace Cl, anebo s pomocí pojmu odvození, to jest pojmu jisté posloupnosti formulí vyhovující jistým syntaktickým požadavkům.

Tyto možnosti jsou zcela rovnocenné v tomto smyslu. O uzávěru $Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{m}$ množiny $\mathbf{m} \subseteq \mathbf{u}$ relacemi $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ je možno dokázat, že $\mathbf{a} \in Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{m}$ tehdy a jen tehdy, když k prvku $\mathbf{a}$ lze dospět *konečně mnoha* "aplikacemi" relací $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ na celkem konečně mnoho prvků z $\mathbf{m}$. Což platí zase, právě když existuje konečná posloupnost, jejíž členy jsou obecně nějaké prvky z $\mathbf{m}$ a jinak už jen prvky, které lze získat relací $\mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_n$ z nějakých předcházejících prvků posloupnosti čili odvození.

Proto definování odvoditelnosti s pomocí pojmu Cl může být v tomto případě nahrazeno definováním s pomocí pojmu odvození. Obdobně je tomu i v případě níže uvedených tvrzení $\vdash A$, $\mathbf{m} \vdash^{\mathcal{O}} A$, $\mathbf{m} \vdash^{\mathcal{N}} A$.

Definice s pomocí pojmu Cl pro kalkul en je pak takováto:

($\mathcal{D}$) A je dokazatelná, symbolicky $\vdash A$, právě když $A \in Cl^{\mathcal{F}}_{odl,gen}\mathbf{ax}$,

($\mathcal{O}$) $\vdash^{\mathcal{O}}$ je relace, ve které jsou $\mathbf{m}$ a A tehdy a jen tehdy, když $A \in Cl^{\mathcal{F}}_{odl}(\mathbf{m} \cup Cl^{\mathcal{F}}_{odl,gen}\mathbf{ax})$,

– A je omezeně odvoditelná z $\mathbf{m}$, právě když $\mathbf{m} \vdash^{\mathcal{O}} A$,

($\mathcal{N}$) $\vdash^{\mathcal{N}}$ je relace, ve které jsou $\mathbf{m}$ a A, právě když $A \in Cl^{\mathcal{F}}_{odl,gen}(\mathbf{m} \cup \mathbf{ax})$,

– A je neomezeně odvoditelná z $\mathbf{m}$, právě když $\mathbf{m} \vdash^{\mathcal{N}} A$.

Zřejmě je pro odlišení obou relací odvoditelnosti důležité, co dovoluje konkrétní definice odvoditelnosti generalizovat: zda se pro generalizaci stanoví v definici určité omezení nebo ne.

Definice s pomocí pojmu Cl pro "obecný" hilbertovský kalkul zní: Jestliže $\mathcal{R}_1$ je množina $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_p\}$ a $\mathcal{R}_2$ je množina $\{\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_q\}$, pak

$\vdash A$, právě když $A \in Cl^{\mathcal{F}}_{\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_p,\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_q}\mathbf{ax}$,

$\mathbf{m} \vdash^{\mathcal{O}} A$, právě když $A \in Cl^{\mathcal{F}}_{\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_p}(\mathbf{m} \cup Cl^{\mathcal{F}}_{\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_p,\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_q}\mathbf{ax})$,

$\mathbf{m} \vdash^{\mathcal{N}} A$. právě když $A \in Cl^{\mathcal{F}}_{\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_p,\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_q}(\mathbf{m} \cup \mathbf{ax})$.

Definice neomezené odvoditelnosti nemusí rozlišovat množiny relací $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, definice omezené odvoditelnosti je však rozlišovat musí. Definice omezené odvoditelnosti připustí neomezenou aplikaci pravidel $\mathcal{R}_1$, ale pokud jde o pravidla $\mathcal{R}_2$, připustí pouze jejich aplikaci na formule, jejichž důkaz v odvození již vidíme.

Připomeňme, že $Cn\mathbf{k}$ je totéž co $Cl^{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n}\mathbf{n} \cap \mathbf{k}$, kde $\mathbf{u}$ je pevně daná množina formulí, $\mathbf{n}$ je pevně daná množina axiomů a $\mathbf{r}_1 \ldots, \mathbf{r}_n$ je pevně daná množina produkujících relací. S pomocí pouhého "Cn" ovšem nelze vyjádřit odlišnost mezi dvěma pojmy odvození. V dalším textu se nebudeme opírat o definici odvoditelnosti s pomocí pojmu Cl, nýbrž o definice odvoditelnosti s pomocí pojmu odvození. Pojem Cl, který umožňuje velmi názorná vyjádření, použijeme jen nadbytečně a okrajově.

Definice s pomocí pojmu odvození, jež ukážeme v oddílech 6, 7, 8, jsou velmi diferencované.

1.4.7 Definice odvoditelnosti s pomocí pojmu odvození

Na půdě hilbertovských kalkulů ekvipotentních kalkulu *en* byla podána řada definic omezené odvoditelnosti. Roku 1942 podal svou definici omezené odvoditelnosti *A. Church* (srv. [1]). Roku 1952 a 1962 podává své definice omezeného odvození *S. C. Kleene* (srv. [5], [7]); definice jsou bohužel složité. Elegantní a jednoduchou definici omezeného odvození podali roku 1956 (*R. Montague* a *L. Henkin*, (srv. [10]). Jinou jednoduchou definici podává r. 1994 *C. H. Papadimitriou* (srv. [12]). Jiní autoři, například *A. Mostowski*, použijí k definici omezené odvoditelnosti jen pojem dokazatelnosti a implikace (srv. [11]). Ukážeme tyto definice omezené odvoditelnosti, definici neomezené odvoditelnosti i definici důkazu, která je nezbytná. Relace zavedené jednotlivými definicemi budeme označovat jako *ch*-odvoditelnost, *mh*-odvoditelnost, *pp*-odvoditelnost apod. a vesměs půjde o naše označení *ad hoc*. Pamatujme však, že dvě různá jména relace, například "*mh*-odvoditelnost" a "*pp*-odvoditelnost", mohou být různá jména jedné a téže relace. Různost označení v takovém případě odpovídá různosti definic, které danou relaci vymezily.

Relaci odvoditelnosti zavedenou *Churchem* v [1] nazýváme *ch*-odvoditelností. Připomeňme, že *Church* uvažuje jen o odvoditelnosti z konečných množin, ale zobecnění, které podáme, je bez potíží možné.

ch-odvození z množiny formulí $\{B_1, \dots B_n\}$ je právě každá posloupnost E_1, E_2, …, E_r formulí, jejíž každý člen je logický axióm, nebo některá z formulí B_1, …, B_n nebo vznikne ze dvou předchozích členů odloučením, nebo vznikne z jednoho předchozího členu generalizací vzhledem k takové proměnné, která není volná v $\{B_1, \dots B_n\}$. A je *ch*-odvoditelné z $\mathbf{m}$, právě když existuje *ch*-odvození formule A z nějaké konečné podmnožiny množiny $\mathbf{m}$.

R. Montague a *L. Henkin* však ukázali r. 1956, že odvoditelnost takto definovaná nesplňuje požadavek 2(c) čili 2(c'), tak zvaný požadavek monotonnosti: "co je odvoditelné z nějaké množiny, je odvoditelné i z její nadmnožiny". Podle definice *ch* je například formule $\forall a(Pa \to Pa)$ odvoditelná z prázdné množiny, ale není odvoditelná z množiny $\{Pa\}$. *Churchovo* omezení generalizace bylo zřejmě příliš silné: při každém kroku odvození platil stabilně zákaz generalizace vzhledem k proměnným volným v celé množině premis $\{B_1, \dots, B_n\}$, i kdyby k odvození formule, která měla být generalizována, byla zužitkována jen podmnožina této množiny, dokonce možná i prázdná množina.

R. Montague a *L. Henkin* podávají definici odvoditelnosti, kterou označujeme jako mh-odvoditelnost. Definici mh-odvoditelnosti musí předcházet definice důkazu a pro srovnání uvádíme i definici neomezené odvoditelnosti.

Důkaz je právě každá posloupnost E_1, E_2, ..., E_r formulí, kde pro každé i z $\{1,\ldots,r\}$ platí: E_i je axióm nebo E_i je získána odloučením některé z formulí z $E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}$ od některé jiné z těchto formulí nebo E_i je získána generalizací některé z formulí z $E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}$. Formule A je dokazatelná, symbolicky: $\vdash A$, právě když existuje její důkaz, to jest důkaz, v němž je A poslední formulí.

Zřejmě A je dokazatelná formule, právě když, když $A \in Cl^{\mathcal{F}}_{odl,gen}\mathbf{ax}$, to jest právě když A patří do každé množiny obsahující axiómy a uzavřené vzhledem k odloučení a generalizaci.

Definice důkazu v daném hilbertovském kalkulu je v literatuře v podstatě u všech autorů taková, jak jsme uvedli, leda že by byl důkaz definován jako odvození z prázdné množiny. Právě tak se v literatuře definuje neomezené odvození celkem shodně s pomocí následující definice.

Neomezené odvození z množiny formulí $\mathbf{m}$ je právě každá posloupnost E_1, E_2, ..., E_r formulí, kde pro každé i z $\{1,\ldots,r\}$ platí: E_i je axióm nebo E_i patří do $\mathbf{m}$ nebo E_i je získána odloučením některé z formulí z $E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}$ od některé jiné z těchto formulí nebo E_i je získána generalizací některé z formulí z $E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}$. (Srv. *Mendelson* [9], str. 36, 37.) Formule A je neomezeně odvoditelná z $\mathbf{m}$ tehdy a jen tehdy, když existuje její neomezené odvození z $\mathbf{m}$, to jest neomezené odvození z $\mathbf{m}$, ve kterém je A poslední formulí.

Zřejmě A je neomezeně odvoditelná z $\mathbf{m}$ tehdy a jenom tehdy, když $A \in Cl^{\mathcal{F}}_{odl,gen}(\mathbf{m} \cup \mathbf{ax})$, čili právě když A patří do každé množiny, která obsahuje $\mathbf{m}$ i množinu axiómů a je uzavřena vzhledem k odloučení i generalizaci.

Skutečnost, že mnozí autoři vykládají pod označením "odvoditelnost" pouze neomezenou odvoditelnost, a to celkem shodně, může u jejich čtenářů vyvolat představu, že tyto definice jsou integrální součástí kalkulu. Jak jsme již řekli, v našem pojetí tomu tak není: týž kalkul připouští dvě skupiny definic odvoditelnosti, a přitom jedna skupina definuje jinou relaci odvoditelnosti, než druhá.

mh-odvození z množiny formulí $\mathbf{m}$ je právě každá posloupnost E_1,

$E_2, \ldots, E_r$ formulí, kde pro každé j z $\{1, \ldots, r\}$ platí, že E_j je axióm nebo E_j patří do $\mathbf{m}$ nebo E_j je získána odloučením z některých předchozích formulí nebo E_j je získána generalizací nějaké předchozí formule E_h takové, že nějaká podposloupnost posloupnosti $E_1, E_2, \ldots, E_h$ je důkaz formule E_h. Podposloupností posloupnosti prvků $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, ... se rozumí každá posloupnost $\mathbf{a}_{i_1}$, $\mathbf{a}_{i_2}$, $\mathbf{a}_{i_3}$, ..., konečná nebo nekonečná, jejíž každý člen je členem posloupnosti $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, ... a $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$. Formule A je mh-odvoditelná z $\mathbf{m}$ tehdy a jen tehdy, když existuje její mh-odvození z $\mathbf{m}$, to jest mh-odvození z $\mathbf{m}$, ve kterém je formule A poslední formulí. (Srv. *R. Montague* a *L. Henkin*, [10].)

Očividně, A je mh-odvoditelná z $\mathbf{m}$ v kalkulu en tehdy a jen tehdy, když $A \in Cl^{\mathcal{F}}_{odl}(\mathbf{m} \cup Cl^{\mathcal{F}}_{odl,gen}\mathbf{ax})$. To jest, právě když A patří do každé množiny, která obsahuje $\mathbf{m}$ i množinu dokazatelných formulí a je uzavřena vzhledem k odloučení.

Mimochodem, uvarujme se pokušení ztotožnit obsahově uvedenou definici s touto: "Odvození $\mathbf{m}$ je každá posloupnost formulí, ve které každý člen posloupnosti je logický axióm nebo vznikne ze dvou předchozích členů odloučením nebo vznikne generalizací z jednoho předchozího členu, *který je dokazatelnou formulí.* A je z $\mathbf{m}$ odvoditelná, právě když existuje odvození z $\mathbf{m}$, jehož poslední člen je A." Množina takto definovaných odvození nebude rozhodnutelná, a to ani tehdy, když množina $\mathbf{m}$ bude rozhodnutelná. Bude-li $\mathbf{m}$ rozhodnutelná a budeme-li rozhodovat, zda daná konečná posloupnost formulí je odvození, budeme nuceni v některých případech rozhodnout, zda nějaká formule uvedená v této posloupnosti je v tomto kalkulu dokazatelná. Avšak neexistuje algoritmus, který by umožňoval rozhodnout o libovolné dané formuli, zda je v daném kalkulu dokazatelná (*A. Church*, 1936). Oproti tomu v mh-odvození musí být požadovaný důkaz přítomen jako podposloupnost odvození, a pak existuje algoritmus, který umožňuje o každé podposloupnosti dané posloupnosti formulí rozhodnout, zda je to důkaz v daném kalkulu.

7.1. Věta. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) A je dokazatelná,

(ii) A je mh-odvoditelná z prázdné množiny,

(iii) A je neomezeně odvoditelná z prázdné množiny.

(Neboli $Cl^{\mathcal{F}}_{odl,gen}\mathbf{ax} = Cl^{\mathcal{F}}_{odl}(\emptyset \cup Cl^{\mathcal{F}}_{odl,gen}\mathbf{ax}) = Cl^{\mathcal{F}}_{odl,gen}(\emptyset \cup \mathbf{ax})$.) Důkaz lze přenechat čtenáři.

Jinou definici omezené odvoditelnosti uvádí *C. H. Papadimitriou*, [12], str. 104. pp-odvození z množiny formulí $\mathbf{m}$ je právě každá posloupnost $E_1, E_2, \ldots, E_r$ formulí, kde pro každé j z $\{1, \ldots, n\}$ platí: Ej je je získána n generalizacemi z některého logického axiómu ($n \geq 0$) nebo E_j patří do $\mathbf{m}$ nebo E_j je získána odloučením z některých dvou předchozích formulí. Formule A je pp-odvoditelná z $\mathbf{m}$ tehdy a jen tehdy, když existuje její pp-odvození z $\mathbf{m}$, to jest takové pp-odvození z $\mathbf{m}$, ve kterém je A poslední formulí.

Zřejmě A je pp-odvoditelné z $\mathbf{m}$, právě když $A \in Cl^{\mathcal{F}}_{odl}(\mathbf{m} \cup Cl^{\mathcal{F}}_{gen}\mathbf{ax})$. Nyní směřujeme k důkazu, že A je z $\mathbf{m}$ pp-odvoditelná, právě když A je z $\mathbf{m}$ mh-odvoditelná.

7.2. Lemma. *O formuli tvaru $\forall y_1 \ldots \forall y_m D$, kde D je axióm a $m \geq 0$, říkáme, že je získána z axiómů generalizacemi. Ke každému důkazu formule E existuje efektivně důkaz formule E, ve kterém každá formule tvaru $\forall x C$ je buď získána z axiómů generalizacemi nebo ji lze získat z nějakých předchozích formulí odloučením.*

Důkaz. *Pretextem* libovolného daného důkazu nazýváme nejdelší jeho počáteční úsek $E_1, \ldots, E_m$, ve kterém každé E_i lze získat z axiómů generalizacemi. Pretext důkazu je ovšem vždy neprázdná posloupnost (začíná nějakým axiómem) a je to důkaz své poslední formule. Nechť posloupnost $\mathcal{P}$ je důkaz formule F.

(i) Odstraňme v něm opakování formulí. Tím dostaneme jakousi posloupnost $\mathcal{P}^o$, která je důkazem formule F.

(ii) Všechny axiómy v $\mathcal{P}^o$ přesuňme na začátek posloupnosti, a bezprostředně za ně každou formuli z $\mathcal{O}^o$, kterou lze získat z axiómů generalizacemi. Přitom zachovejme pořadí, v jakém se vyskytují v $\mathcal{P}^o$. Nyní máme posloupnost $\mathcal{P}^{oo} = \alpha\delta$, kde posloupnost formulí α je pretext. Opět je to důkaz formule F. Kdyby byla posloupnost δ prázdná, lemma by platilo triviálně. Předpokládejme, že prázdná není.

(iii) V δ najdeme první formuli tvaru $\forall x C$, kterou nelze získat z předchozích formulí odloučením; protože není v pretextu, nelze ji získat z axiómů generalizacemi. Není tedy získatelná jinak než generalizací nějaké formule C, která je mimo pretext. Tato formule C není získána generalizací (to by $\forall x C$ nebyla první formule zmíněného druhu) a je tedy nutně získána odloučením z nějakých předchozích formulí $(B \to C)$, B. Získaná posloupnost, kterou označíme $\mathcal{P}^{ooo}$ a která je opět důkazem formule F, má tedy tvar

$$\alpha, \underbrace{C_1, C_2, \ldots, C_r}_{odl}, \forall x C_r, \omega, \tag{$*$}$$

kde α je pretext, C_1, …, C_r je posloupnost formulí, které v daném důkazu lze získat odloučením, a ovšem $r \geq 1$. Uvedená formule $\forall x C_r$ je tedy první formule, kterou v daném důkazu nelze získat jinak než generalizací takové formule C_r, kterou zase nelze získat jinak než odloučením. Budeme předpokládat o všech i z $\{1, \ldots, r\}$, že formuli C_i lze získat odloučením z nějakých formulí $(B_i \to C_i)$, B_i; přitom buď

(a) $(B_i \to C_i)$ i B_i jsou obsaženy v pretextu α, nebo

(b) $(B_i \to C_i)$ je obsažena v pretextu α, kdežto B_i je některá z formulí $C_1, \ldots, C_{i-1}$, nebo

(c) B_i je obsažena v pretextu α, kdežto $(B_i \to C_i)$ je některá z formulí $C_1, \ldots, C_{i-1}$, nebo

(d) jak $(B_i \to C_i)$ tak i B_i jsou členy posloupnosti $C_1, \ldots, C_{i-1}$.

Nechť pro každé i z $\{1, \ldots, r\}$

G_1^i	je axióm	$(\forall x_i(B_i \to C_i) \to (\forall x_i B_i \to \forall x_i C_i))$,
G_2^i	je formule	$\forall x_i(B_i \to C_i)$,
G_3^i	je formule	$\forall x_i B_i$,
H_i	je formule	$(\forall x_i B_i \to \forall x_i C_i)$,

Nyní sestrojíme (indukcí) řadu důkazů:

důkaz	tvaru	s pretextem
$\mathcal{P}_1^{ooo}$	$\alpha, \beta_1, H_1, \forall x_1 C_1$	α, β_1
$\mathcal{P}_2^{ooo}$	$\alpha, \beta_1, \beta_2, H_1, \forall x_1 C_1, H_2, \forall x_2 C_2$	α, β_1, β_2
…	…	…
$\mathcal{P}_r^{ooo}$	$\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r, H_1, \forall x_1 C_1, \ldots, H_r, \forall x_r C_r$	$\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r$

kde za pretextem jsou formule získávány pouze odloučením.

1^o. C_1 je určitě získána odloučením z nějakých dvou formulí: $(B_1 \to C_1)$ a B_1. Obě jsou součástí pretextu α, čili jde o případ (a). Pak β_1 budiž posloupnost formulí G_1, G_2, G_3 a máme důkaz $\mathcal{P}_1^{ooo}$:

$$\underbrace{\alpha, \overbrace{G_1^1, G_2^1, G_3^1}^{\beta_1},}_{\text{pretext}} \underbrace{H_1, \forall x_1 C_1}_{odl}$$

2^o. Předpokládejme, že již máme důkaz $\mathcal{P}_{i-1}^{ooo}$

$$\underbrace{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1},}_{\text{pretext, } 1 \leq i-1 < r} \underbrace{H_1, \forall x_1 C_1, H_2, \forall x_2 C_2, \ldots, H_{i-1}, \forall x_{i-1} C_{i-1}}_{odl}$$

Důkaz $\mathcal{P}_i^{ooo}$ dostaneme takto. V případě (a) rozšíříme pretext o posloupnost $\beta_i = G_1^i$, G_2^i, G_3^i a na konec posloupnosti připojíme $H_i, \forall x_i C_i$. V případě (b) rozšíříme pretext o posloupnost $\beta_i = G_1^i$, G_2^i a na konec posloupnosti připojíme $H_i, \forall x_i C_i$. Formule G_3^i je některá z formulí $\forall x_1 C_1$, $\ldots$, $\forall x_{i-1} C_{i-1}$. V případě (c) rozšíříme pretext o posloupnost $\beta_i = G_1^i$, G_3^i a na konec posloupnosti připojíme $H_i, \forall x_i C_i$. G_2^i je některá z formulí $\forall x_1 C_1$, $\ldots$, $\forall x_{i-1} C_{i-1}$. Konečně v případě (d) rozšíříme pretext o posloupnost $\beta_i = G_1^i$ a na konec posloupnosti připojíme $H_i, \forall x_i C_i$. Formule G_2^i je některá z formulí $\forall x_1 C_1$, $\ldots$, $\forall x_{i-1} C_{i-1}$ a stejně tak i formule G_3^i. V každém případě dostaneme důkaz $\mathcal{P}_r^{ooo}$ s pretextem $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_i$, ve kterém vše za ním bylo získáno odloučením:

$$\underbrace{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r,}_{\text{pretext}} \underbrace{H_1, \forall x_1 C_1, \ldots, \forall x_r C_r}_{odl}.$$

V důkazu $(*)$ formule F nahradíme jeho počáteční úsek

$$\alpha, C_1, \ldots, C_r, \forall x_r C_r,$$

posloupností $\mathcal{P}_r^{ooo}$ a dostaneme důkaz formule F

$$\underbrace{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r,}_{\text{pretext}} \underbrace{H_1, \forall x_1 C_1, \ldots, \forall x_r C_r,}_{odl} \omega \tag{$**$}$$

který obsahuje o jednu menší počet výskytů formulí tvaru $\forall x C$, které nemohly být získány jinak než generalizací a leží mimo pretext. Pokud i v (**) leží za pretextem formule, kterou nelze získat jinak než generalizací, opět aplikujeme obdobně kroky (i), (ii) atd.

7.3. Věta. *A je pp-odvoditelná z* **m** *tehdy a jen tehdy, když A je mh-odvoditelná z* **m**. *Jinými slovy řečeno,*

$$Cl^{\mathcal{F}}_{odl}(\mathbf{m} \cup Cl^{\mathcal{F}}_{gen}\mathbf{ax}) = Cl^{\mathcal{F}}_{odl}(\mathbf{m} \cup Cl^{\mathcal{F}}_{odl,gen}\mathbf{ax}).$$

Důkaz. V daném mh-odvození formule A z $\mathbf{m}$ přesuňme na začátek všechny podposloupnosti, které jsou důkazy, a to při zachování pořadí formulí, v jakém je nacházíme v daném mh-odvození. Máme posloupnost, která je opět mh-odvození formule A z $\mathbf{m}$:

$$\pi, \underbrace{\sigma}_{odl}. \tag{I}$$

Je spojením dvou posloupností: všechny důkazy jsou v π, pokud je σ neprázdná, pak σ začíná formulí, která patří do $\mathbf{m}$ a není získána z axiómů generalizacemi, a všechny formule v σ lze získat odloučením. Nyní upravíme π, σ podle lemmatu, takže dostaneme posloupnost

$$\underbrace{\underbrace{\pi_1}_{\text{pretext}}, \underbrace{\pi_2}_{odl}}_{\text{důkazy}}, \underbrace{\sigma}_{odl} \tag{II}$$

čili posloupnost

$$\underbrace{\underbrace{\pi_1}_{\text{pretext}}, \underbrace{\pi_2, \sigma}_{odl}}$$

a ta splňuje podmínky vyslovené v definici *pp*-odvození. Dokázali jsme: je-li A mh-odvoditelné z $\mathbf{m}$, je také A *pp*-odvoditelné z $\mathbf{m}$. Obrácená implikace ovšem také platí, protože každé *pp*-odvození A z $\mathbf{m}$ je mh-odvození A z $\mathbf{m}$.

Pokud jde o vyjadřování s pomocí *Cl*, množina členů posloupnosti π_1 je podmnožinou množiny $Cl^{\mathcal{F}}_{gen}\mathbf{ax}$. V lemmatu jsme dokázali tvrzení (†), takže

(†) $Cl^{\mathcal{F}}_{odl,gen}\mathbf{ax} \subseteq Cl^{\mathcal{F}}_{odl}Cl^{\mathcal{F}}_{gen}\mathbf{ax}$,
$Cl^{\mathcal{F}}_{odl}(\mathbf{m} \cup Cl^{\mathcal{F}}_{odl,gen}\mathbf{ax}) \subseteq Cl^{\mathcal{F}}_{odl}(\mathbf{m} \cup Cl^{\mathcal{F}}_{odl}Cl^{\mathcal{F}}_{gen}\mathbf{ax})$,
$Cl^{\mathcal{F}}_{odl}(\mathbf{m} \cup Cl^{\mathcal{F}}_{gen}\mathbf{ax}) \subseteq Cl^{\mathcal{F}}_{odl}(\mathbf{m} \cup Cl^{\mathcal{F}}_{odl}Cl^{\mathcal{F}}_{gen}\mathbf{ax})$.

Použili jsme mimo jiné (f″). Na druhé straně platí očividně

$$\begin{aligned}
&Cl^{\mathcal{F}}_{gen}\mathbf{ax} \subseteq Cl^{\mathcal{F}}_{odl,gen}\mathbf{ax},\\
&\mathbf{m} \cup Cl^{\mathcal{F}}_{gen}\mathbf{ax} \subseteq \mathbf{m} \cup Cl^{\mathcal{F}}_{odl,gen}\mathbf{ax},\\
&Cl^{\mathcal{F}}_{odl}(\mathbf{m} \cup Cl^{\mathcal{F}}_{gen}\mathbf{ax}) \subseteq Cl^{\mathcal{F}}_{odl}(\mathbf{m} \cup Cl^{\mathcal{F}}_{odl,gen}\mathbf{ax}).
\end{aligned}$$

Tyto dva výsledky dávají větu 7.3.

Mimochodem, z I dostáváme ihned další definici omezené odvoditelnosti. Je ekvivalentní oné definici, kterou podává S. C. Kleene v [7], str. 132, 133.

kl-odvození z množiny $\mathbf{m}$ je každá posloupnost $E_1, \ldots, E_n, F_1, \ldots, F_k$, jejíž každý člen je axióm nebo formule z $\mathbf{m}$ nebo formule, kterou lze získat z předchozích odloučením nebo formule, kterou lze získat z předchozích generalizací, pokud $k = 0$ nebo platí: F_1 je první formule v této posloupnosti, která patří do $\mathbf{m}$ a každá z formulí $F_2, \ldots, F_k$ patří do $\mathbf{m}$ nebo ji lze získat odloučením. Formule A je kl-odvoditelná z $\mathbf{m}$, právě když existuje její kl-odvození z $\mathbf{m}$, to jest kl-odvození z $\mathbf{m}$ končící formulí A.

Kleene však používá k definování odvoditelnosti více pojmů, kupříkladu pojem fixování resp. variování proměnných.

Použijme pro přehlednost symbolický zápis "$\mathbf{k} \vdash^{mh} D$" místo "D je mh-odvoditelné z $\mathbf{k}$". Lze dokázat větu o dedukci:

$$\text{jestliže } \mathbf{m} \cup \{B\} \vdash^{mh} A, \text{ pak } \mathbf{m} \vdash^{mh} (B \to A).$$

(Věta o dedukci pro neomezenou odvoditelnost by byla složitější. Vidíme ji v oddílu 1.)

Lze ovšem dokázat také obrácenou implikaci, takže platí ekvivalence:

$$\mathbf{m} \cup \{B\} \vdash^{mh} A \text{ tehdy a jen tehdy, když } \mathbf{m} \vdash^{mh} (B \to A).$$

Víme také, že A je mh-odvoditelné z $\mathbf{m}$, právě když je odvoditelné z nějaké konečné podmnožiny množiny $\mathbf{m}$. (Ovšem že to platí i o odvození neomezeném, ale o tom teď není řeč.)

Z toho pak vyplývá, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- A je mh-odvoditelné z $\{B_1, \ldots, B_n\}$,
- z $\emptyset$ je mh-odvoditelné $(B_1 \to (B_2 \to \ldots \to (B_n \to A)\ldots))$,
- formule $(B_1 \to (B_2 \to \ldots \to (B_n \to A)\ldots))$ je dokazatelná.

Další možná definice omezené odvoditelnosti, zde označené jako *mo*-odvoditelnost, může tedy vypadat takto: *mo*-odvození A z $\mathbf{m}$ je každý důkaz nějaké takové formule $(A_1 \to (A_2 \to \ldots \to (A_n \to A) \ldots))$ $(n \geq 0)$, kde $A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{m}$. Formule A je *mo*-odvoditelná z $\mathbf{m}$, symbolicky: $\mathbf{m} \vdash_{mo} A$, právě když existuje *mo*-odvození formule A z $\mathbf{m}$.

Tato definice obsahově odpovídá pojetí vyjádřenému kupříkladu v *A. Mostowském*, [11], 1948. Slovy "matematický důkaz" označuje autor ukázání, že pro některé formule $A_1, \ldots, A_n, B$ platí $\vdash (A_1 \to (A_2 \to (\ldots (A_n \to B) \ldots)))$, což způsobuje zbytečnou zdlouhavost jeho "matematických důkazů" a také se neshoduje s matematickou praxí, kde matematický důkaz se podobá spíše *mh*-odvození nebo přirozené dedukci závěru B z premis $A_1, \ldots, A_n$.

1.4.8 Odvoditelnost a sentence

Obecný uzávěr formule C je každá formule $\forall a_{i_1} \forall a_{i_2} \ldots \forall a_{i_r} C$, kde $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ $(r \geq 0)$ jsou všechny proměnné volné v C; platí-li navíc, že $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$, jde o standardní obecný uzávěr formule C, symbolicky $\forall C$. Je-li $\mathbf{m}$ množina formulí, $\forall \mathbf{m}$ budiž množina, do které patří D tehdy a jen tehdy, když D je standardní obecný uzávěr $\forall C$ nějaké formule z $\mathbf{m}$.

8.1. Věta. *A je neomezeně odvoditelná z $\mathbf{m}$ tehdy a jen tehdy, když $\forall A$ je omezeně odvoditelná z $\forall \mathbf{m}$.*

Důkaz Mějme neomezené odvození

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \tag{$\mathcal{P}$}$$

formule A_n z $\mathbf{m}$. Ukážeme, že existují posloupnosti formulí $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ takové, že posloupnost

$$\pi_1, \forall A_1, \pi_2, \forall A_2, \ldots, \pi_n, \forall A_n \tag{$\mathcal{P}'$}$$

je omezené odvození.

1^o. A_1 je axióm nebo formule z $\mathbf{m}$. Pak ale pro prázdné π_1 je posloupnost $\pi_1, \forall A_1$ omezené odvození z $\forall \mathbf{m}$.

2^o. Předpokládejme, že posloupnost

$$\pi_1, \forall A_1, \pi_2, \forall A_2, \ldots, \pi_i, \forall A_i$$

je omezené odvození z $\forall\mathbf{m}$ a $i < n$. Když A_{i+1} je axióm nebo formule z $\mathbf{m}$, uvažujeme jako v případě 1^o. Když je A_{i+1} získána v $\mathcal{P}$ z předchozího A_h generalizací, liší se $\forall A_{i+1}$ od $\forall A_h$ nejvýše pořadím formulí v prefixu. Například $\forall A_h$ je formule $\forall u_1 \dots \forall u_m C$ a $\forall A_{i+1}$ je formule $\forall z_1 \dots \forall z_m C$, takže, jak se čtenář snadno ujistí, existuje posloupnost $\pi_{i+1}, \forall A_{i+1}$, která začíná $\forall A_h$ (které tu necháme opakovat), pak generalizacemi a odloučením, ale s odvoláním výlučně na axiómy dospěje k $\forall z_1 \dots \forall z_m(\forall u_1 \dots \forall u_m C \to C)$. Odtud potom pokračuje, opět bez odvolání na cokoli jiného než axiómy, k $(\forall u_1 \dots \forall u_m C \to \forall z_1 \dots \forall z_m C)$ a odtud odloučením k $\forall z_1 \dots \forall z_m C$, čili k $\forall A_{i+1}$. Pokud je A_{i+1} v $\mathcal{P}$ získána z předchozích formulí $(A_h \to A_{i+1}), A_h$ odloučením, umíme sestrojit posloupnost π_{i+1}, A_{i+1} takovou, která bude začínat $\forall(A_h \to A_{i+1}), \forall A_h$ (které tu necháváme opakovat) a dále už jen axiómy a výsledky odloučení. Je to zřejmé z předchozího důkazu. Zbývá už jen prodloužit posloupnost $\mathcal{P}'$ tak, abychom dostali A_n, což lze učinit bez generalizace.

Na druhé straně, každé omezené odvození formule A_n z $\forall\mathbf{m}$ je neomezené odvození formule A_n z $\forall\mathbf{m}$ (které nevyužilo některé možnosti). Vložíme-li před ně posloupnost, ve které se generalizuje každá formule E z $\mathbf{m}$ taková, že $\forall E$ se vyskytuje v omezeném odvození z $\forall\mathbf{m}$, máme omezené odvození formule A_n z $\mathbf{m}$.

8.2. Korolár. *Je-li $\mathbf{m} \cup A$ množina samých sentencí, to jest neobsahuje-li žádná formule patřící do $\mathbf{m} \cup A$ žádné volné výskyty proměnných, pak A je neomezeně odvoditelná z $\mathbf{m}$ tehdy a jen tehdy, když A je omezeně odvoditelná z $\mathbf{m}$, čili $\mathbf{m} \vdash^{\mathcal{N}} A$ tehdy a jen tehdy, když $\mathbf{m} \vdash^{\mathcal{O}} A$.*

Neboť pak $\forall\mathbf{m} = \mathbf{m}$, $\forall A = A$.

8.3. Korolár. *Je-li $\mathbf{m}$ množina samých sentencí, pak platí:*

$$\mathbf{m} \cup \{B\} \vdash^{\mathcal{N}} A, \quad \textit{právě když} \quad \mathbf{m} \vdash^{\mathcal{N}} (B \to A).$$

Pro sentence tedy platí věta o dedukci (a obrácená implikace) v stejně jednoduché formulaci, jako věta o dedukci pro omezené odvození, řekněme mh-odvození.

Poznámka. Nyní se nabízí definice odvození, ve kterém vůbec nebude existovat generalizace a jediným pravidlem bude pravidlo odloučení. Stačí změnit definici důkazu: Důkaz je každá posloupnost $E_1, \dots, E_m$

ve které pro každé i z $\{1, \ldots, m\}$ platí, že E_i je obecný uzávěr axiómu (kalkulu en) nebo je to formule tvaru $\forall(\forall x \forall y A \rightarrow \forall y \forall x A)$ nebo ji lze získat z předchozích formulí odloučením.

1.4.9 Podmínky zajišťující jedinost relace omezené odvoditelnosti

Montague a *Henkin* uvádějí v [11] následující tvrzení o relaci $\vdash$ a dokazují, že jedna a jenom jedna relace $\vdash$ je splňuje.

(i) Je efektivně řešitelnou úlohou pro každou rozhodnutelnou množinu formulí $\mathbf{m}$ a každou formuli A, rozhodnout, zda daný formální objekt je nebo není formální dedukce A z $\mathbf{m}$.

(ii) Jestliže A je prvkem $\mathbf{m}$ nebo axiómem (MJ hilbertovského kalkulu) ekvipotentního s en, pak $\mathbf{m} \vdash A$.

(iii) Jestliže $\mathbf{m} \vdash (A \rightarrow B)$ a $\mathbf{m} \vdash A$, pak $\mathbf{m} \vdash B$.

(iv) Jestliže $\mathbf{m} \cup \{A\} \vdash B$, pak $\mathbf{m} \vdash (A \rightarrow B)$.

(v) Jestliže $\mathbf{m} \vdash A$ a x je proměnná, která není v žádné formuli patřící do $\mathbf{m}$ volná, pak $\mathbf{m} \vdash \forall x A$.

(vi) Jestliže $\mathbf{m} \vdash A$, pak $\mathbf{m} \cup \mathbf{k} \vdash A$.

(vii) Jestliže $\emptyset \vdash A$, pak A je dokazatelná formule.

(viii) Jestliže $\mathbf{m} \vdash A$, pak existuje konečná podmnožina $\mathbf{k}$ množiny $\mathbf{m}$ taková, že $\mathbf{k} \vdash A$.

Uvedené podmínky jsou splněny, je-li $\vdash$ relace omezené odvoditelnosti $\vdash^{\mathcal{O}}$, ať už je nadefinována jako mh-odvoditelnost nebo jako pp-odvoditelnost nebo jako mo-odvoditelnost. Odvoditelnost $\vdash^{\mathcal{N}}$ nesplňuje podmínku (iv). Například dvoučlenná posloupnost

$$Pa, \forall a Pa$$

je neomezené odvození, takže $\{Pa\} \vdash^{\mathcal{N}} \forall a Pa$; ale není pravda, že $\vdash^{\mathcal{N}} (Pa \rightarrow \forall a Pa)$.

Také relace neomezené odvoditelnosti je jen jedna. Připusťme, že $\vdash_1^{\mathcal{N}}$, $\vdash_2^{\mathcal{N}}$ jsou dvě relace neomezené odvoditelnosti a

$$\text{platí } \mathbf{m} \vdash_1^{\mathcal{N}} A \text{ a neplatí } \mathbf{m} \vdash_2^{\mathcal{N}} A,$$

čili

$$\text{platí } \forall\mathbf{m} \vdash_1^{\mathcal{O}} \forall A \text{ a neplatí } \forall\mathbf{m} \vdash_2^{\mathcal{O}} \forall A,$$

a tedy existují dvě různé relace omezené odvoditelnosti, což je ale spor.

Tento výsledek jsme mohli zužitkovat například, když jsme dokazovali, že relace mh-odvoditelnosti je totožná s relací pp-odvoditelnosti, ale na druhé straně bychom se vzdali důkazu, který je výmluvnější, který například ukazuje existenci algoritmu sestrojení mh-odvození k danému pp-odvození.

1.4.10 Omezené a neomezené vyplývání. Dvojí význam slova "model".

Nyní se dostáváme k otázkám položeným v článku *V. Švejdara* v [14], to jest v tomto výtisku sborníku *Miscellanea logica.* Definujeme relace $\models^{\mathcal{O}}$ a $\models^{\mathcal{N}}$.

($\mathcal{O}$) modelem$^{\mathcal{O}}$ množiny formulí $\mathbf{m}$ rozumíme každou interpretaci UIV, která splňuje $\mathbf{m}$,

– modelem$^{\mathcal{O}}$ formule A rozumíme každou interpretaci UIV, která splňuje formuli A,

– z $\mathbf{m}$ omezeně vyplývá A čili $\mathbf{m} \models^{\mathcal{O}} A$, právě když každá interpretace splňující $\mathbf{m}$ splňuje A, čili právě když každý model$^{\mathcal{O}}$ množiny $\mathbf{m}$ je model$^{\mathcal{O}}$ formule A,

($\mathcal{N}$) modelem$^{\mathcal{N}}$ množiny formulí $\mathbf{m}$ rozumíme každou interpretaci UIV takovou, že UIV splňuje $\forall\mathbf{m}$,

– modelem$^{\mathcal{N}}$ formule A rozumíme každou interpretaci UIV takovou, že UIV splňuje $\forall\mathbf{m}$,

– z $\mathbf{m}$ neomezeně vyplývá A čili $\mathbf{m} \models^{\mathcal{N}} A$, právě když každá interpretace splňující $\forall\mathbf{m}$ splňuje $\forall A$, čili právě když každý model$^{\mathcal{N}}$ množiny $\mathbf{m}$ je model$^{\mathcal{N}}$ formule A.

Když je UIV modelem$^{\mathcal{N}}$ množiny nebo formule, pak pro každou valuaci W je UIW modelem$^{\mathcal{N}}$ této množiny resp. formule a tedy "V" je fiktivní argument, který smí být vynechán.

Relace $\vdash^{\mathcal{O}}$ je totožná s relací $\models^{\mathcal{O}}$, neboť obě splňují (ii)–(viii) a existuje jen jedna relace splňující tyto podmínky. Z obdobného důvodu je i relace $\vdash^{\mathcal{N}}$ totožná s relací $\models^{\mathcal{N}}$. Máme tedy nadefinovány čtyři skupiny pojmů:

ODVODITELNOST	VYPLÝVÁNÍ A MODEL
$\mathbf{m} \vdash^{\mathcal{O}} A$	$\mathbf{m} \models^{\mathcal{O}} A$
z $\mathbf{m}$ je omezeně odvoditelné A	z $\mathbf{m}$ omezeně vyplývá A
	UIV je model$^{\mathcal{O}}\mathbf{m}$
	UIV je model$^{\mathcal{O}}A$
$\mathbf{m} \vdash^{\mathcal{N}} A$	$\mathbf{m} \models^{\mathcal{N}} A$
z $\mathbf{m}$ je neomezeně odvoditelné A	z $\mathbf{m}$ neomezeně vyplývá A
	UIV je model$^{\mathcal{N}}\mathbf{m}$
	UIV je model$^{\mathcal{N}}A$

Slova “model”, “vyplývá”, “je odvoditelné” užívají někteří autoři v tom, jiní v onom smyslu. Logiku můžeme vyložit bezchybně, ať si zvolíme pojetí odpovídající v naší tabulce kterémukoli z obou kvadrantů v levé polovině tabulky a pojetí odpovídající kterémukoli z obou kvadrantů v pravé polovině naší tabulky. Volba může být lépe nebo hůře podepřena ohledy na účelnost (a to didaktickou resp. teoretickou), jednoduchost a eleganci; dojde-li ke sporu, pokud jde o tuto volbu, v podvědomí účastníka sporu se uplatní jako nejlepší ta volba, na kterou je už navyklý.

V meziválečné éře dominovaly hilbertovské kalkuly a logikové praktikovali “líné psaní”: místo tvrzení “platí (v daném UI) $\forall A$” řekli “platí (v daném UI) A”, a počáteční obecné kvantifikátory tedy vynechali. Je to ovšem běžné v matematice a také v metajazyce při výkladu logiky. To bylo příznivé onomu pojetí, které vidíme ve spodních kvadrantech tabulky.

Později se prosazuje vedle hilbertovských kalkulů i přirozená dedukce, která se týká zjišťování, zda sekvent

$$B_1 B_2 \dots B_n \therefore A$$

je pravidlo správného usuzování. Pak je jednodušší a didakticky výrazně lepší definovat odvoditelnost v tomto duchu: “z $\mathbf{m}$ je odvoditelné A, právě když pro některé $n \geq 0$ a některé $B_1, \dots, B_n$ je sekvent $B_1 B_2 \dots B_n \therefore A$ pravidlo správného usuzování”: odvoditelnost se v takovém případě definuje jako pouhé rozšíření správného usuzování i na případ, kdy máme k použití nekonečně mnoho premis. Méně přirozené, ale také možné, by bylo požadovat v definici, aby sekvent $\forall B_1 \forall B_2 \ldots \forall B_n \therefore \forall A$ byl pravidlem správného usuzování. Bude-li tedy pro nás odvoditelnost omezenou odvoditelností, to jest odvoditelností z horní poloviny tabulky, je opět přirozené přijmout i relaci vyplývání a pojem modelu z horní poloviny tabulky. Logik, který by podržel omezenou odvoditelnost, ale který by chtěl přijmout pojem vyplývání z dolní poloviny tabulky, musel by se vyrovnat s jistými konceptuálními komplikacemi například při důkazu adekvátnosti. Ale není to jen ohled na přirozenou dedukci, který může motivovat k přijetí pojmů z horní poloviny tabulky. Tři závažnější důvody znějí takto.

(a) Pojmy z horní poloviny tabulky jsou obecnější v tomto smyslu: máme-li vyloženo, co znamená $\mathbf{m} \vdash^{\mathcal{O}} A$, například tak jak to učinili *Montague* a *Henkin*, pak můžeme bez potíží pojednávat o neomezené odvoditelnosti A z $\mathbf{m}$ jako o omezené odvoditelnosti $\forall A$ z $\forall \mathbf{m}$, tedy o pouhém speciálním případu omezené odvoditelnosti. Žádnou možnost obdobně jednoduchého vybudování omezené odvoditelnosti jakožto zvláštního případu odvoditelnosti neomezené nevidíme. Přitom vše, co jsme zde řekli o odvoditelnosti, platí analogicky i pro vyplývání a model.

(b) Učitel logiky, který chce být co nejvíce nápomocný svým studentům, zejména nematematikům, se nemůže zříci jednoduchého heuristického principu, principu odvozování *ex hypothesi*[6], který spolu s jinými má mimořádnou didaktickou cenu:

> chceš-li ukázat, že z $\{C_1, \ldots, C_n\}$ je odvoditelné $(B \to A)$, stačí ukázat že z $\{C_1, \ldots, C_n, B\}$ je odvoditelné A.

Tento obecný (všech formulí se týkající) heuristický princip odvozování zmíněný v oddílu 1 však lze odůvodnit jen tehdy, zakládáme-li výklad logiky na omezené odvoditelnosti.

(c) Použijeme-li pojmy z horní poloviny tabulky, prakticky nic neztrácíme v metamatematickém pojednávání o teoriích. Ty jsou totiž tvořeny sentencemi a v pojednání o samotných sentencích spadají pojmy z horní poloviny tabulky v jedno s pojmy z dolní poloviny tabulky: model$^{\mathcal{O}}$ množiny sentencí $\mathbf{m}$ je totéž co model$^{\mathcal{N}}$ této množiny.

(d) Student, kterému byla odvoditelnost nadefinována jako neomezená a který se potom seznámí s přirozenou dedukcí, velmi pravděpo-

[6] Toto označení lze nalézt u *Leibnize*

dobně "přimísí" ke svému pojmu neomezené odvoditelnosti nevědomky některé vlastnosti typické pro odvoditelnost omezenou.

Jistou nevýhodou přijetí pojmů z horní poloviny tabulky je, že jsme zbaveni výhody "líného psaní", takže pak místo abychom napsali cosi jako "platí, že A", jsme nuceni napsat "platí, že $\forall x A$", někdy dokonce se musíme přemoci a napsat celý kvantifikátor a možná i více než jeden!

Chceme-li provést v sémantice obdobné rozlišení jako je rozlišení omezené a neomezené odvoditelnosti, slova "omezené vyplývání", "omezený model", "neomezené vyplývání" a "neomezený model" špatně vyjadřují své skutečné významy ukázané v pravé polovině tabulky. Snad termíny "neuzavřená odvoditelnost (neuzavřené vyplývání, neuzavřený model)" by lépe nahradily termíny z horní poloviny tabulky, a termíny "uzavřená odvoditelnost (uzavřené vyplývání, uzavřený model)" by snad lépe nahradily pojmy z dolní poloviny tabulky.

Rozhodování autorů pro pojmy z horní nebo dolní poloviny tabulky je rozhodováním mezi silou tradičního pojetí přenášeného po generace z učitelů na žáky, a odvahou k odpoutání od tradičního pojetí a uplatnění principu jednoduchosti. Příkladem této odvahy k maximální jednoduchosti výkladu a přeryvu tradice je *H. Hermes* [3], který ovšem zcela konsekventně buduje svůj výklad na pojmech z horní poloviny tabulky. Autor tohoto článku vidí v konceptuální jednoduchosti, větší obecnosti, eleganci a didaktických přednostech dostatečně závažné důvody, aby logikové pokládali výstavbu výkladu logiky založenou na pojmech z horní poloviny tabulky za legitimní, dobře odůvodnitelnou a (pokud tuto výstavbu výkladu logiky neuplatní ve výuce logiky) přinejmenším hodnou zmínky.

Literatura

[1] Church A., *Introduction to mathematical logic*, Part I, Princeton, 1942

[2] Enderton H. B., *A mathematical introduction to Logic*, Academic Press, New York and London, 1972

[3] Hermes H., *Introduction to Mathematical Logic*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973

[4] Kleene S. C., *Introduction to metamathematics*, Amsterdam - Groningen - New York - Toronto, 1952 (též rusky), reed. 1957

[5] Kleene S. C., *Vveděnije v matěmatičeskuju logiku*, Izd. inostrannoj litěratury, Moskva, 1957

[6] Kleene S. C., *Mathematical logic*, J. Willey & sons, Inc., New - York - London - Sydney, 1967 (též rusky)

[7] Kleene S. C., *Matěmatičeskaja logika*, Izd. Mir, Moskva, 1973

[8] Mendelson E., *Introduction to mathematical logic*, Princeton (New Jersey), 1964

[9] Mendelson E., *Vveděnije v matěmatičeskuju logiku*, Izd. Nauka, Moskva 1971

[10] Montague R., Henkin L., *On the definition od formal deduction*, JSL, Vol. 21, Number 2, June 1956

[11] Mostowski A., *Logika matematyczna*, Monografie matematyczne, Tom XVIII, Warszawa - Wrocław, 1948

[12] Papadimitriou Ch. H., *Computational complexity*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994

[13] Schröter K., *Theorie des logischen Schliessens*, ZML, Bd 1, 1955

[14] Švejdar V., *Poznámka o vztahu vyplývání v klasické predikátové logice*, Miscellanea logica, toto číslo

[15] Tarski A., *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften*, Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 37/1930

Miroslav Jauris
Katedra logiky
Filozofická fakulta Univerzity Karlovy
Praha

Kapitola 2

Logika a fyzika

2.1 Problém redukce a explanace ve fyzice *Petr Jirků* [1]

V tomto příspěvku chceme ukázat na jedno z možných pojetí redukce a explanace v teoretické fyzice a na problémy s tím spojené. Přitom se však nechceme omezovat jen na teorie fyzikální a bereme v úvahu také teorie, které po formální stránce odpovídají níže popsaným teoriím fyzikálním; budeme proto nadále hovořit raději *o teoriích fyzikálního typu.*

Je známo, že předmětem redukce a vědeckého vysvětlení se může stát vedle nějaké konkrétní události či fenoménu též obecný zákon nebo teorie. A právě otázky redukce a explanace teorií a zákonů, nebo obecněji, otázky vzájemných vztahů teorií v procesu redukce a explanace, učiníme středem naší pozornosti. Přitom zde budeme redukci chápat jako vysvětlení nějakého obecného zákona či teorie T (která je konstruována k explikaci určité oblasti jevů O) na základě jiných obecných zákonů nebo jiné teorie T_1 (která je konstruována k explikaci obecně jiné oblasti jevů O_1). Chápeme tedy redukci jako stanovení obecných explanatorních principů pro daný zákon či teorii.

Poznamenejme ještě, že se nebudeme zabývat samotným *procesem redukce a explanace*, ale že nám půjde o hotové vysvětlení či redukci, ne-

[1] Tento příspěvek vznikl s podporou grantu GA ČR 401/98/0383 Alternativy klasické logiky.

boli o vztah *explananda* (v našem případě vysvětlované teorie) a již nalezených argumentů, uvažovaných jako *explanans*. Tento přístup ovšem jistě nelze chápat staticky, protože každé redukci či explanaci vždy předchází vyhledání příslušných argumentů a ona statická stránka následuje až po tvůrčí stránce procesu redukce a explanace. Tyto, patrně velmi důležité otázky však přesahují rámec tohoto příspěvku.[2]

Přejděme proto k jádru věci. Ve známém Hempel-Oppenheimově deduktivním modelu explanace a redukce [4] jde vždy o nějakou logickou inferenci závěrů z daných premis, z nichž vždy alespoň jedna má formu zákona (tj. je zákonem nebo zákonu podobnou větou nebo obecnou generalizací). Tento požadavek znamená, že explanans obecně nemusí vždy obsahovat nějaké antecedentní empirické podmínky, ale že současně množina zákonů uvažovaných v explanans musí být vždy neprázdná, přičemž není rozhodující, zda jde o zákon fundamentální či odvozený, nebo dokonce o fundamentální či odvozenou teorii[3]. Lze tedy uvažovat o vysvětlení určitého zákona či teorie na základě jiného zákona či (širší) teorie, jak jsme si stanovili dříve.

V empirických vědách se však velmi často setkáváme s explanacemi a redukcemi zřejmě nededuktivního charakteru. Dále ukážeme takový případ redukce fyzikálních teorií. Podle některých autorů je ovšem ideálem vědy dosažení deduktivní formy explanace a redukce, což patrně souvisí se snahami po unifikaci vědy vůbec. Naskýtá se proto otázka, zda skutečnost, že ne ve všech vědách je dosaženo deduktivní formy explanace a redukce, je dána dosud nízkou teoretickou úrovní těchto věd, a bude možné ji dalším rozvojem odstranit, nebo zda existují některé principiální překážky, které nedovolují dosáhnout deduktivní inference třeba i mezi vysoce rozvinutými teoretickými systémy, pro něž existuje nějaká společná neprázdná oblast jevů, kterou explikují. Potíže tohoto druhu nás povedou k přijetí nové definice pojmu explanace a redukce.

Všimněme si tedy nejprve blíže struktury teorií fyzikálního typu. V zásadě můžeme rozlišit dva krajní případy. Je jednak možné, že

[2]Podobně používá pojmu redukce např. E. Nagel v *The Structure of Science* [4]. Nagelovi ovšem jde o to, zda je možno danou teorii nad určitou oblastí jevů přenést do jiné oblasti, zatímco nás bude spíše zajímat případ, kdy se obě oblasti spíše překrývají.

[3]V případě, kdy explanans neobsahuje žádné antecedentní empirické podmínky - a to je právě tehdy, když předmětem vysvětlení je zákon nebo teorie - spadá problematika vysvětlení v jedno s problémem nalezení důkazu (obvykle v rámci nějaké širší teorie). To pro případ deduktivní explanace.

je dána určitá oblast jevů O_1 (observační materiál), pro niž hledáme (konečnou) množinu zákonů, teorii T_1, takovou, že (všechny) výpovědi o faktech oblasti O_1 jsou odvoditelné z teorie T_1. Anebo je možné, že naopak máme k dispozici určitý formální (matematický) systém vět T_2 a hledáme jeho interpretaci (resp. model), tj. oblast jevů O_2, které by byly teorií T_2 explikovány. V prvém případě jde, jak se často říká, o teorie empiricko-induktivní, ve druhém o teorie hypoteticko-deduktivní. V teoriích fyzikálních není ovšem pravidlem, a často to není ani nutné, aby se tyto dva typy výstavby teorií vyskytovaly v čisté podobě. Avšak všechny hotové teoretické systémy si patrně můžeme představit (alespoň potenciálně) jako axiomatizované systémy, což zde znamená, že jsou stanoveny základní zákony, které ve fyzikálních teoriích obvykle nazýváme principy, a dále jsou stanovena transformační pravidla, obvykle nějaký formální, nejspíš matematický, aparát. Protože jde o empirické teorie, přistupuje zde navíc ještě požadavek empirické či experimentální ověřitelnosti[4] teorie, tj. požadavek, podle něhož musí být možno z dané teorie odvodit takové důsledky, jež lze přímo porovnávat s empirickou evidencí (observačním materiálem), která však musí být zřejmě jiného druhu než evidence, na jejímž základě byla tato teorie vybudována.

Mějme nyní dvě teorie T_1 a T_2 takové, že oblasti jevů, O_1 a O_2, které jsou jimi explikovány, mají neprázdný průnik. Dále budeme pro stručnost hovořit místo o oblasti explikovaných jevů teorií T o *oboru teorie* T. K takovéto situaci obvykle dochází tak, že teorie T_1 a T_2 po sobě časově následují a obvykle je obor teorie T_1 podoborem oboru teorie T_2. Přitom se klade požadavek, aby se výsledky teorie T_2 v oblasti, která je průnikem obou oborů, shodovaly s výsledky staré teorie T_1. Stará teorie T_1 je pak považována za mezní (limitní) případ nové teorie T_2. Přitom se obecně soudí, že nová teorie T_2 má charakter explanans pro teorii T_1.[5] Je zřejmé, že zde již nemusí jít o deduktivní formy explanace. Patrně je možno ukázat typy vzájemných přechodů a souvislostí mezi různými teoriemi, které jsou zřejmě nededuktivního charakteru. Například pří-

[4]Ověřitelností zde ovšem rozumíme jak možnost potvrzení (konfirmace) v Carnapově smyslu tak možnost falzifikace v Popperově smyslu.

[5]Souvislosti tohoto typu můžeme ve fyzikálních teoriích ukázat např. z hlediska limitních přechodů podle tzv. univerzálních konstant. Např. pro rychlost světla c a Planckovu konstantu h: 1. $c \to \infty$, $h \to 0$ (Newtonská mechanika, fenomenologická termodynamika), 2. $c = konst.$ (speciální teorie relativity, relativistická elektrodynamika), 3. $c \to \infty$, $h = konst.$ (kvantová mechanika v klasickém smyslu atd.), 4. $c = konst.$, $h = konst.$ (relativistická kvantová mechanika).

pad, kdy jedna teorie je aproximací jiné teorie, jako je vztah fenomenologické termodynamiky a statistické fyziky. Že obecně mezi dvěmi teoriemi s neprázdným průnikem oborů nemusí být vztah deduktivního vyplývání, velmi zřetelně ukázal P. K. Feyerabend (viz [2]) na příkladě Galileiho a Newtonovy mechaniky. Ukázal, že nová (Newtonova) teorie "vysvětluje" starou (Galileiho) teorii tím, že ji *opravuje*.[6]

Ukážeme nyní, že tato situace se v jistém smyslu opakuje při vzniku klasické kvantové fyziky.

Na počátku vzniku kvantové mechaniky formuloval Niels Bohr tzv. *princip korespondence* pro souvislost klasické a kvantové teorie záření. Podle tohoto principu je kvantový systém co do emise a absorbce záření *ekvivalentní* systému klasických harmonických oscilátorů (viz. [1]). To má za následek, že klasické a kvantové frekvence si navzájem korespondují. Tento princip ovšem vyhovoval pouze pro velká kvantová čísla, neboli v oblasti velmi vzdálených drah elektronů, kdy spektrum těchto drah je prakticky spojité, což je vlastně předpoklad klasické mechaniky.

Princip korespondence byl později zobecněn na celou mechaniku, takže zákony klasické mechaniky byly považovány za limitní případy zákonů mechaniky kvantové.

Podstatné je nyní toto. Stejné výsledky (tj. klasické zákony teorie záření ze zákonů kvantové teorie záření) dostaneme, když v zákonech kvantové teorie provedeme limitní přechod $h \to 0$. Tento fakt ovšem ještě neznamená, že zákony kvantové teorie mohou sloužit jako explanans pro zákony klasické teorie ve smyslu deduktivní inference, protože uvedený limitní proces je ve skutečnosti fiktivním procesem, neboť Planckova konstanta má vždy pevnou konečnou hodnotu. Tento přechod pouze umožňuje získat výsledky *početně shodné* s hodnotami plynoucími z empiricky úspěšných zákonů klasické teorie. Fyzikálně to např. znamená jen tolik, že přecházíme do oblasti jevů, kde neexistuje žádná experimentální evidence, která by nám umožnila kvantitativně rozlišit výsledky kvantové a klasické teorie.

Fakticky totiž předpokládáme, že zákony kvantové teorie platí pro všechny fyzikální jevy, avšak v určité oblasti jevů v důsledku experimentální nerozlišitelnosti, která je dána soudobým stavem observačního materiálu a experimentálních metod, vystačíme se zákony staré teorie.

[6]Podle Galileiho bylo gravitační zrychlení $g = konst.$, kdežto podle Newtonovy teorie je $g = g(r)$.

Tedy jen v tomto smyslu je možno říci, že klasická mechanika je obsažena v mechanice kvantové a že je kvantovou mechanikou vysvětlena.

Navíc, uvědomíme-li si, že se při přechodu od jedné teorie ke druhé mění *smysl* teoretických termínů (zde např. elektron, atom apod.), je zřejmé, že zde nemůžeme mluvit o deduktivní inferenci.

Ukazuje se tedy, že obecně mezi starými a novými teoriemi konstruovanými k explikaci určité společné oblasti jevů není vztah dedukovatelnosti a že dosáhnout deduktivní inference je možno pouze uvnitř jediného teoretického systému nad danou oblastí. Zde je ovšem požadavek dedukovatelnosti triviální.

Můžeme tedy uzavřít, že vedle ortodoxního způsobu redukce a explanace je spíše úkolem nalézat jednotu pro různé typy inference (k čemuž patrně může být dobře využita logika). Podat vysvětlení ať už konkrétní události či jevu, anebo obecného zákona či teorie, znamená podat argument, který obecně, na rozdíl od deduktivní inference, kdy chceme zjistit (dokázat) nějaký závěr na základě jistých tvrzení, která předpokládáme jako premisy, je argumentem takového druhu, jenž nemá dokázat pravdivost nebo akceptovatelnost nějakých závěrů. V procesu redukce a explanace vždy totiž předpokládáme, že nějaká událost již nastala anebo že vysvětlovaný zákon či teorie jsou empiricky úspěšné (satisfied) v určitém oboru. Lze tedy říci shodně s J. W. N. Watkinsem, že

- *teorie T_2 vysvětluje teorii T_1 tehdy a jen tehdy, když z teorie T_2 je odvoditelný takový důsledek, že tento důsledek je* experimentálně nerozlišitelný *od výsledků teorie T_1 v oblasti, která je průnikem oborů obou teorií T_1 a T_2.*

Neboli, obě teorie dávají v určité společné oblasti shodné výsledky.

Poděkování: Autor příspěvku děkuje doc. dr. M. Jaurisovi za cenné připomínky a poznámky, které podstatnou měrou přispěly k odstranění některých nedopatření a ke zlepšení textu.

Literatura

[1] D. I. Blochincev: Základy kvantové mechaniky. Academia, Praha 1956.

[2] P. K. Feyerabend: Explanation, Reduktion and Empiricism In: *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, Volume III, 1962.

[3] C. G. Hempel, P. Oppenheim: Studies in the Logic of Explanation. *Philosophy of Science, 15*, 1948.

[4] E. Nagel: The Structure of Science, 1961.

[5] W. Pauli: Allgemeine Grundlagen der Wellenmechanik. Berlin 1947.

Petr Jirků
Katedra logiky
Filozofická fakulta Univerzity Karlovy
Praha
E-mail: Petr.Jirku@ff.cuni.cz

2.2 Logika a kvantová fyzika

Milan Matoušek[7]

Abstract. V následujícím příspěvku je podána modifikace Mackeyovy axiomatizace popisu kvantového systému (viz práci [3]). Volba axiomů umožní triviálním způsobem dospět k tzv. ortomodulárnímu zákonu. Algebry splňující tento zákon pak rozšiřují třídu Booleových algeber. Přitom lze na jejich základě vybudovat výrokový počet analogický klasickému výrokovému počtu.
Key words: orthomodular lattice, quantum logic.
AMS Class.: 06C15, 08C15.

2.2.1 Axiomatizace kvantové mechaniky

Problém měření v kvantové mechanice

Vyjděme z Heisenbergova myšlenkového pokusu:

Nechť elektron se pohybuje ve směru osy x; chceme změřit jeho polohu a impuls.

Pro měření polohy ho osvětlíme světlem s vlnovou délkou λ. Nepřesnost v určení polohy pak bude

$$\triangle x \sim \lambda \ .$$

Světelný foton má impuls $\frac{E}{c}$, kde E je jeho energie, c je rychlost světla. Při vysvětlení fotoelektrického jevu Albert Einstein ukázal, že $E = \hbar\nu$, kde ν je frekvence světla (tj. $\nu = \frac{c}{\lambda}$). (Konstanta úměrnosti $\hbar$ se nazývá *Planckova konstanta.*) Tento impuls foton odevzdá elektronu, a tím vnese nepřesnost při měření impulsu elektronu:

$$\triangle p \sim \frac{E}{c} \ .$$

Nyní

$$\triangle x \cdot \triangle p \sim \lambda \cdot \frac{E}{c} = \lambda \cdot \frac{\hbar\nu}{c} = \hbar$$

(tzv. *Heisenbergova relace neurčitosti*).

[7]Tento příspěvek vznikl s podporou grantu GA ČR 401/98/0383.

Při měření v kvantové mechanice naším cílem tedy nebude získání *současných přesných* hodnot měřených veličin (neboť to někdy není ani principiálně možné), nýbrž stanovení pravděpodobností, že naměřené veličiny budou prvky určitých množin.

Základními pojmy, které při procesu měření v kvantovém systému budeme používat, jsou:

Stav systému ... intuitivně odpovídá úplné znalosti fyzikálního systému, která nám umožňuje dělat předpovědi o daném systému. Symbolem $\mathcal{S}$ budeme označovat množinu všech stavů daného systému.

Pozorovatelné ... odpovídají měřitelným fyzikálním veličinám. Ke každé pozorovatelné existuje zařízení, které umožňuje měřit její hodnoty. Hodnoty pozorovatelných se vyjadřují reálnými čísly v odpovídajících jednotkách. Symbolem $\mathcal{O}$ (Observables) budeme označovat množinu všech pozorovatelných daného systému.

Výroky ... takové jevy, které při daném měření buď nastanou nebo ne (odtud též používaný název "ano-ne experiment"). Výroky proto můžeme považovat za pozorovatelné, jež nabývají pouze dvou hodnot: 0, 1. Symbolem $\mathcal{P}$ (Propositions) budeme označovat množinu všech výroků pro daný systém.

Přejděme nyní k axiomatizaci vlastností základních pojmů. Přístup k této axiomatizaci může být buď

stavově-pozorovatelný, kdy elementárními jsou množiny $\mathcal{S}$ a $\mathcal{O}$, resp.

kvantově-logický, kdy elementární je množina $\mathcal{P}$.

Oba přístupy jsou z matematického hlediska ekvivalentní, první je však fyzikálně snáz interpretovatelný, druhý je matematicky elegantnější.

V tomto článku ukáži axiomatizaci, jež je jakousi "střední cestou" mezi oběma výše uvedenými axiomatizacemi. Elementárními pojmy zde budou pojmy "stav" a "výrok".

Dále budeme předpokládat, že je dáno zobrazení

$$p : \mathcal{S} \times \mathcal{P} \to [0,1] \ .$$

Přitom hodnotu $p(s, P)$ budeme interpretovat takto:

$$p(s,P) \textit{ je pravděpodobnost platnosti výroku } P \textit{ ve stavu } s \ .$$

Přijměme postupně následující axiomy:

(1) **axiom jednoznačnosti**

$$\forall s_1, s_2 \in \mathcal{S} : (\forall P \in \mathcal{P} : p(s_1, P) = p(s_2, P)) \Rightarrow s_1 = s_2 \ ;$$

$$\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P} : (\forall s \ \in \mathcal{S} : p(s, P_1) = p(s, P_2)) \Rightarrow P_1 = P_2 \ .$$

Definice 1.1 Pro $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ položme
$P_1 \leq P_2$, jestliže $\forall s \ \in \mathcal{S} : p(s, P_1) \leq p(s, P_2)$. $\square$

Lemma 1.1 Relace $\leq$ je uspořádání na množině $\mathcal{P}$. $\square$

(2) **axiom nejmenšího a největšího prvku**
Existují prvky $P_0, P_1 \in \mathcal{P}$ tak, že

$$\forall s \ \in \mathcal{S} : p(s, P_0) = 0, \ p(s, P_1) = 1$$

(tj. výrok P_0 je s jistotou nepravdivý v každém stavu s, výrok P_1 je s jistotou pravdivý v každém stavu s).

Lemma 1.2 Výroky $P_0, \ P_1$ jsou určeny jednoznačně; budeme je značit $0_\mathcal{P}, 1_\mathcal{P}$.

Navíc, prvek $0_\mathcal{P}$ (resp. $1_\mathcal{P}$) je nejmenší (resp. největší) prvek v posetu $(\mathcal{P}, \leq)$. $\square$

(3) **axiom komplementu**

$$\forall P \in \mathcal{P} \exists Q \in \mathcal{P} \forall s \ \in \mathcal{S} : p(s, Q) = 1 - p(s, P) \ .$$

Lemma 1.3 Je-li $P \in \mathcal{P}$, pak prvek Q z axiomu (3) je prvkem P určen jednoznačně; budeme jej značit $P^\perp$. $\square$

Lemma 1.4 (i) $(0_\mathcal{P})^\perp = 1_\mathcal{P}, (1_\mathcal{P})^\perp = 0_\mathcal{P}$.
(ii) $\forall P \in \mathcal{P} : P^{\perp\perp} = P$.
(iii) $\forall P, \ Q \in \mathcal{P} : P \leq Q \Rightarrow Q^\perp \leq P^\perp$. $\square$

Definice 1.2 Pro $P_1, \ P_2 \in \mathcal{P}$ položme:
$P_1 \perp P_2$, jestliže $\forall s \ \in \mathcal{S} : p(s, P_1) + p(s, P_2) \leq 1$. $\square$

Lemma 1.5 $P_1 \perp P_2$ právě když $P_1 \leq {P_2}^\perp$. $\square$

(4) **axiom ortogonálních suprem**

Jsou-li $P_1,\ P_2, \ldots \in \mathcal{P}$ a $P_i \perp P_j$ pro libovolné $i \neq j$, pak existuje $P \in \mathcal{P}$ tak, že

$$\forall s\ \in \mathcal{S} : p(s,P) = \sum p(s,P_i)\ .$$

Lemma 1.6 Prvek P je prvky $P_1,\ P_2, \ldots$ určen jednoznačně; budeme jej značit $P_1 + P_2 + \ldots$. □

Jsou-li $P_1,\ P_2, \ldots, P_n$ po dvou ortogonální výroky, označme

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_n = P_1 + P_2 + \ldots + P_n + 0_{\mathcal{P}} + 0_{\mathcal{P}} + \ldots \quad .$$

Pro $s \in \mathcal{S}$ pak platí:

$$p(s, P_1 + P_2 + \ldots + P_n) = p(s,P_1) + \ldots + p(s,P_n)\ .$$

Věta 1.1 Buďte $P,\ R_1,\ R_2, \ldots$ po dvou ortogonální výroky. Pak též $P \perp R_1 + R_2 + \ldots$. □

Důsledek 1.1 Buďte $P_1,\ P_2, \ldots \in \mathcal{P}$ po dvou ortogonální výroky. Označme $P = P_1 + P_2 + \ldots$.

Pak prvek P je supremum množiny $\{P_i;\ i \in \mathbf{N}\}$ v uspořádané množině $(\mathcal{P}, \leq)$. □

Množina výroků $\mathcal{P}$ tedy vzhledem k relaci $\leq$ a operaci $^\perp$ splňuje tyto podmínky:

(i) $(\mathcal{P}, \leq)$ je poset s nejmenším $(0_{\mathcal{P}})$ i největším $(1_{\mathcal{P}})$ prvkem;

(ii) $\forall P,\ Q \in \mathcal{P} : \text{jestliže } P \leq Q, \text{pak } Q^\perp \leq P^\perp$;

(iii) $\forall P \in \mathcal{P} : P^{\perp\perp} = P$;

(iv) jsou-li $P_1,\ P_2, \ldots \in \mathcal{P}$ po dvou ortogonální výroky, pak existuje supremum $\bigvee P_i$;

(v) platí tzv. *ortomodulární zákon*:

$$\forall P,\ Q \in \mathcal{P} : \text{jestliže } P \leq Q, \text{pak } Q = P \vee (P \vee Q^\perp)^\perp \quad .$$

Poznámka 1.1 Jestliže $P \leq Q$, pak $Q^\perp \leq P^\perp$, tj. $Q^\perp \perp P$, a $Q^\perp \vee P$ existuje.

Dále $P \leq P \vee Q^\perp = (P \vee Q^\perp)^{\perp\perp}$, tj. $P \perp (P \vee Q^\perp)^\perp$, a tedy $P \vee (P \vee Q^\perp)^\perp$ existuje.

Dále uvidíme, že $(P \vee Q^\perp)^\perp = \inf\{Q, P^\perp\} = Q \wedge P^\perp$. Je-li $P \leq Q$, pak místo $Q \wedge P^\perp$ budeme psát $Q - P$.

Ortomodulární zákon můžeme tedy psát takto:

$$\text{jestliže } P \leq Q, \text{pak } Q = P + (Q - P)\ .$$

Důkaz vlastnosti (v):

Nechť $P \leq Q$, a buď $s \in \mathcal{S}$. Pak
$p\left(s, P \vee (P \vee Q^\perp)^\perp\right) = p(s,P) + p(s,(P \vee Q^\perp)^\perp) =$
$= p(s,P) + [1 - p(s, P \vee Q^\perp)] = p(s,P) + [1 - p(s,P) - p(s,Q^\perp)] =$
$= p(s,P) + [p(s,Q) - p(s,P)] = p(s,Q).$

2.2.2 Algebraizace

Definice 2.1 *Ortomodulárním posetem* (*OMP*) budeme rozumět každou uspořádanou pětici $L = (X, \leq, 0_L, 1_L, {}^\perp)$, přičemž:

(i) $(X, \leq, 0_L, 1_L, {}^\perp)$ je poset s nejmenším (0_L) i největším (1_L) prvkem;

(ii) $\forall x,\ y \in X : \text{jestliže } x \leq y, \text{pak } y^\perp \leq x^\perp;$

(iii) $\forall x \in X : x^{\perp\perp} = x;$

(iv) $\forall x,\ y \in X$: jestliže $x \leq y^\perp$, pak existuje supremum $x \vee y$;

(v) platí ortomodulární zákon:

$$\forall x,\ y \in X : \text{jestliže } x \leq y, \text{pak } y = x \vee (y \wedge x^\perp)\ \ . \ \square$$

Definice 2.2 Je-li L OMP, $x, y \in L$, $x \leq y^\perp$, pak budeme psát $x \perp y$; říkáme, že x, y jsou ortogonální prvky.

Jsou-li $x, y \in L$, $x \perp y$, pak místo $x \vee y$ budeme též psát $x + y$. $\square$

Lemma 2.1 Nechť L je OML. Pak platí:
(1) $0_L^\perp = 1_L,\ 1_L^\perp = 0_L$;
(2) de Morganovy zákony:
$\forall x, y \in L$: existuje-li $x \vee y$, pak existuje též $x^\perp \wedge y^\perp$ a platí:

$$(x \vee y)^\perp = x^\perp \wedge y^\perp \ ;$$

duálně pro $x \wedge y$.
(3) $\forall x \in L$: $x \wedge x^\perp = 0_L$, $x \vee x^\perp = 1_L$. $\square$

Definice 2.3 Buď L OMP. Řekneme, že L je
σ-OMP, platí-li: jsou-li $x_1, x_2, \ldots \in L$ po dvou ortogonální prvky, pak existuje $\vee\{x_i; i = 1, 2, \ldots\}$;
ortomodulární svaz (*OML*), jestliže pro každé $x, y \in L$ existuje $x \wedge y$, $x \vee y$. $\square$

Důsledek 2.1 Je-li $(\mathcal{S}, \mathcal{P}, p)$ systém z odstavce 2.2.1, pak $(\mathcal{P}, \leq, 0_\mathcal{P}, 1_\mathcal{P}, {}^\perp)$ je σ-OMP. $\square$

Tím jsme ukázali "algebraizaci" množiny výroků. Nyní ukážeme "algebraizaci" množiny stavů:
Pro stav $s \in \mathcal{S}$ položme
$m_s = p(s, .) :\ \mathcal{P} \to [0, 1]$, tj. $m_s(P) = p(s, P)$ pro $P \in \mathcal{P}$.

Věta 2.1 Buď $s \in \mathcal{S}$. Pak zobrazení $m_s :\ \mathcal{P} \to [0, 1]$ má tyto vlastnosti:
(i) $m_s(1_\mathcal{P}) = 1$;
(ii) je-li $P_1, P_2, \ldots$ posloupnost po dvou ortogonálních výroků, pak

$$m_s\left(\bigvee_1^\infty P_i\right) = \sum_1^\infty m_s(P_i) \ . \ \square$$

Definice 2.4 Buď L σ-OMP, $m : L \to [0, 1]$. Řekneme, že m je *pravděpodobnostní míra* na L, platí-li
(i) $m(1_L) = 1$;
(ii) je-li $x_1, x_2, \ldots$ posloupnost po dvou ortogonálních prvků z L, pak

$$m\left(\bigvee_1^\infty x_i\right) = \sum_1^\infty m(x_i) \ .$$

Symbolem $\Sigma(L)$ označme množinu všech pravděpodobnostních měr na L. $\square$

Věta 2.2 Buďte $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$. Pak platí:
$s_1 = s_2$ právě když $m_{s_1} = m_{s_2}$. $\square$

Důsledek 2.2 Zobrazení $s \mapsto m_s$ je vnoření $\mathcal{S} \to \Sigma(\mathcal{P})$. $\square$

Věta 2.3 Buďte $P, Q \in \mathcal{P}$. Pak platí:
jestliže $[\forall s \ \in \mathcal{S} : m_s(P) \leq m_s(Q)]$, pak $P \leq Q$. $\square$

Definice 2.5 Buď L σ-OMP, $\Sigma_1 \subseteq \Sigma(L)$. Řekneme, že Σ_1 je *úplná množina pravděpodobnostních měr*, platí-li
$\forall x, y \in L : [\forall m \in \Sigma_1 : m(x) \leq m(y)] \Rightarrow x \leq y$. $\square$

Definice 2.6 *Kvantovou logikou* rozumíme každou uspořádanou dvojici (L, Σ_1), kde L je σ-OMP a Σ_1 je úplná množina pravděpodobnostních měr na L. $\square$

Věta 2.4 Existuje přirozená korespondence mezi třídou všech systémů $(\mathcal{S}, \mathcal{P}, p)$ z části I. a třídou všech kvantových logik. Podrobněji:

Je-li $(\mathcal{S}, \mathcal{P}, p)$ systím z části I., pak $(\mathcal{P}, \{m_s; s \ \in \mathcal{S}\})$ je kvantová logika.

Obráceně, je-li (L, Σ_1) kvantová logika, a jestliže pro $s \in \Sigma_1, P \in L$ položíme $p(s, P) = s(P)$, pak trojice (Σ_1, L, p) splňuje všechny axiomy z odstavce 2.2.1. $\square$

ÚMLUVA: Pro další budování axiomatizace kvantové mechaniky se ukazuje výhodným (nezbytným ?) přijmout axiom, jež nemá přímé fyzikální odůvodnění jako axiomy předchozí:

"OMP $(\mathcal{P}, \leq, ^\perp)$ je izomorfní ortomodulárnímu svazu $\mathcal{L}_H$ všech uzavřených podprostorů nějakého komplexního separabilního nekonečně-dimenzionálního Hilbertova prostoru".

Nám ale pro další budování teorie bude stačit přijmout slabší axiom:
"$(\mathcal{P}, \leq, ^\perp)$ je ortomodulární svaz".

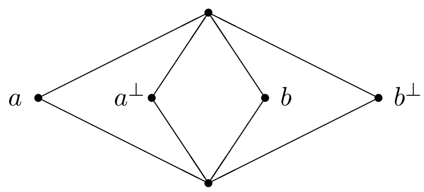
Jsou-li tedy P, Q výroky z $\mathcal{P}$, můžeme vždy utvořit výroky $P \wedge Q$, $P \vee Q$ (jež mají názorný fyzikální význam). Naším cílem konečně bude ukázat, že vezmeme-li místo Booleových algeber ortomodulární svazy, lze vybudovat teorii obdobnou klasické výrokové logice.

Uveďme ale nejprve ještě několik poznámek o ortomodulárních svazech.

Je-li B Booleova algebra, $a, b \in B$, pak platí

$$a = b \text{ právě když } (a \wedge b^{\perp}) \vee (b \wedge a^{\perp}) = 0_B \ . \qquad (*)$$

Prvek $(a \wedge b^{\perp}) \vee (b \wedge a^{\perp})$ se nazývá symetrická diference prvků a, b a značí se $a \bigtriangleup b$. V teorii ortomodulárních svazů však podmínka $(*)$ neplatí. K tomu stačí uvážit následující OML:



Platí však:

Lemma 2.2 Je-li L OML, $a, b \in L$, pak platí:

$$a = b \text{ právě když } (a \vee b) \wedge (a^{\perp} \vee b^{\perp}) = 0_L \ .$$

Důkaz: Stačí dokázat jen $\Leftarrow$. Nechť tedy pro prvky $a, b \in L$ platí $(a \vee b) \wedge (a^{\perp} \vee b^{\perp}) = 0_L$. Protože $a \wedge b \leq a \vee b$, z ortomodulárního zákona plyne:

$a \vee b = (a \wedge b) + [(a \vee b) - (a \wedge b)] = (a \wedge b) \vee [(a \vee b) \wedge (a \wedge b)^{\perp}] = (a \wedge b) \vee 0_L = a \wedge b$.

Z rovnosti $a \vee b = a \wedge b$ již přímo plyne $a = b$. $\square$

Pro $a, b \in L$ (L je OML) položme
$a \bigtriangleup b = (a \vee b) \wedge (a^{\perp} \vee b^{\perp})$,
$aRb = (a \bigtriangleup b)^{\perp} = (a \wedge b) \vee (a^{\perp} \wedge b^{\perp})$.

Poznámka 2.1 Je-li L dokonce Booleova algebra, pak samozřejmě
$a \bigtriangleup b = (a \wedge b^{\perp}) \vee (b \wedge a^{\perp})$. $\square$

Poznámka 2.2 Jsou-li $a, b \in L$ (L je OML), pak

$$a = b \text{ právě když } aRb = 1_L \ . \ \square$$

2.2.3 Ortomodulární logika

Označme $\mathbf{V} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$ množinu všech proměnných,
$\Gamma = \{\wedge, \vee, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Definice 3.1 Definujme induktivně pojem (Γ-)formule:
(1) Každá proměnná je formule.
(2) Každý symbol $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ je formule.
(3) Jsou-li α, β formule, pak též slova

$$\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \neg\alpha$$

jsou formule.
(4) Žádné jinak utvořené slovo formule není.
Symbolem $\mathbf{W}$ označme množinu všech formulí. □

$\mathbf{W}$ lze přirozeným způsobem chápat jako algebra signatury Γ.

Sémantický důsledek

Definice 3.2 Je-li L OML, pak *ohodnocením* v L budeme rozumět každé zobrazení $v : \mathbf{V} \to L$. □

Věta 3.1 Každé ohodnocení $v : \mathbf{V} \to L$ lze jednoznačně rozšířit na zobrazení $\bar{v} : \mathbf{W} \to L$ takové, že
$\bar{v}(\mathbf{0}) = 1_L, \bar{v}(\mathbf{1}) = 1_L$,
a pro libovolné prvky $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$ platí:

$$\bar{v}(\alpha \wedge \beta) = \bar{v}(\alpha) \wedge \bar{v}(\beta)\ , \bar{v}(\alpha \vee \beta) = \bar{v}(\alpha) \vee \bar{v}(\beta)\ , \bar{v}(\neg\alpha) = (\bar{v}(\alpha))^{\perp}\ .$$

Rozšíření $\bar{v}$ budeme pro jednoduchost označovat též v. □

Definice 3.3 Buď L OML, $\alpha \in \mathbf{W}$, $\Sigma \subseteq \mathbf{W}$. Budeme psát:
$L \models \alpha$ (*formule* α *platí* v L), jestliže pro libovolné ohodnocení $v : \mathbf{V} \to L$ platí $v(\alpha) = 1_L$;
$L \models \Sigma$ (L je *modelem* množiny Σ), je-li $L \models \beta$ pro každé $\beta \in \Sigma$;
$\Sigma \models \alpha$ (α je *sémantickým důsledkem* Σ), jestliže formule α platí v každém modelu množiny Σ. □

Definice 3.4 *Tautologií* budeme rozumět každou formuli $\alpha \in \mathbf{W}$ takovou, že α platí v každém ortomodulárním svazu.
Symbolem Π označme množinu všech tautologií. □

Syntaktický důsledek
Přijměme odvozovací pravidlo modus ponens (MP):

$$\frac{\alpha, \neg\alpha \vee \beta}{\beta}$$

Pravidlo (MP) je korektní, tj. platí:

Je-li L OML, $L \models \alpha$, $L \models \neg\alpha \vee \beta$, pak též $L \models \beta$.
Důkaz: Buď dáno ohodnocení $v : \mathbf{V} \to L$. Pak $v(\alpha) = 1_L$, $v(\neg\alpha \vee \beta) = 1_L$, tj. $(v(\alpha))^\perp \vee v(\beta) = 1_L$. Protože $(v(\alpha))^\perp = 0_L$, musí být $v(\beta) = 1_L$. $\square$

Než uvedeme soupis axiomů, připomeňme, že je-li L OML, $a, b \in L$, pak klademe

$$aRb = (a \wedge b) \vee (a^\perp \wedge b^\perp) \ .$$

Jsou-li nyní $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$, pak analogicky položíme

$$\alpha R\beta = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha^\perp \wedge \beta^\perp) \ .$$

Z lemmatu 2.2 nyní plyne, že platí:

Jsou-li $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$, pak pro libovolné ohodnocení v platí:

$$v(\alpha) = v(\beta) \Leftrightarrow \alpha R\beta \in \Pi \ .$$

Přijměme nyní tyto axiomy:

(A1) $\alpha R\alpha$
(A2) $\neg(\alpha R\beta) \vee (\neg(\beta R\gamma) \vee (\alpha R\gamma))$
(A3) $\neg(\alpha R\beta) \vee (\neg\alpha R\neg\beta)$
(A4) $\neg(\alpha R\beta) \vee ((\alpha \wedge \gamma)R(\beta \wedge \gamma))$
(A5) $(\alpha \wedge \beta)R(\beta \wedge \alpha)$
(A6) $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))\, R\, ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$
(A7) $(\alpha \wedge (\alpha \vee \beta))\, R\alpha$
(A8) $(\neg\alpha \wedge \alpha)R\, ((\neg\alpha \wedge \alpha) \wedge \beta)$
(A9) $\alpha R\neg\neg\alpha$

(A10) $\neg(\alpha \vee \beta) R (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
(A11) $(\alpha \vee (\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)))\, R (\alpha \vee \beta)$
(A12) $(\alpha R \beta) R (\beta R \alpha)$
(A13) $\neg(\alpha R \beta) \vee (\neg\alpha \vee \beta)$

Věta 3.2 Všechny axiomy (A1)–(A13) jsou tautologie. □

Definice 3.5 Buď $\Sigma \subseteq \mathbf{W}$, $\psi \in \mathbf{W}$. *Důkazem formule* ψ z množiny Σ budeme rozumět každou konečnou posloupnost formulí

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \ ,$$

kde každý člen je buď některý z axiomů (A1)–(A13), nebo formule ze Σ, nebo vznikl z některých předchozích členů užitím pravidla (MP), a $\psi_n = \psi$.

Existuje-li důkaz formule ψ z množiny Σ, budeme psát $\Sigma \vdash \psi$ (ψ je *syntaktickým důsledkem* Σ). □

Věta o úplnosti v ortomodulární logice
Je-li $\Sigma \subseteq \mathbf{W}$, $\psi \in \mathbf{W}$, pak platí:

$$\Sigma \vdash \psi \text{ právě když } \Sigma \models \psi \ . \ \square$$

Literatura

[1] L.Beran (1985) *Orthomodular Lattices, Algebraic Approach*, D. Reidel, Dordrecht.

[2] G.Kalmbach (1983) *Orthomodular Lattices*, Academic Press, London.

[3] G.Mackey (1963) *The mathematical foundations of quantum mechanics.* New York, Benjamin

[4] P.Pták, S.Pulmannová (1989) *Kvantové logiky*, Veda Bratislava (existuje též anglický překlad: P.Pták, S.Pulmannová (1991) *Orthomodular structures as quantum logics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London).

Milan Matoušek
Katedra logiky
Filozofická fakulta Univerzity Karlovy
Praha
E-mail: Milan.Matousek@ff.cuni.cz

Kapitola 3

CS Bibliografie oboru logika

3.1 CS Bibliografie oboru logika *Petr Jirků a kol.*

Českému čtenáři předkládáme komentovaný přehled česky nebo slovensky psaných učebnic a skript z logiky a z dějin logiky a publikací k logice se úzce vztahujících (včetně překladů). Výběr je zaměřen především na humanitní vědy. Komentáře nejsou recenzemi, mají spíše podat informaci o tématu pojednávaném v dané publikaci. Některé položky obsahují i stručné charakteristiky autorů, pokud nám byly dostupné. Komentáře uvádíme jen k vybraným publikacím, jednak podle jejich významu, jednak ovšem i podle jejich dostupnosti. Předpokládáme, že tento přehled bude v budoucnu doplňován,[1] proto uvítáme každou připomínku či doplnění. V budoucnu předpokládáme, že tento přehled bude převeden pro distribuci v počítačové síti Internet.
Připravili:
Kamila Bendová, Miroslav Jauris, Petr Jirků, Petr Kolář, Michal Peliš, Zdeněk Zastávka

[1] Tento přehled vznikl s podporou grantu **Open Society Fund HC34/96 Logika - CV vysokoškoláka v humanitních vědách**.

[1] M. A. Ajzerman et al. *Logika, automaty a algoritmy.* Academia, Praha, 1971. 407 s.

> Týká se konečných automatů. Nejprve jsou podány základy matematické logiky, je vysvětlen způsob minimalizace logických obvodů. Na závěr jsou diskutovány možnosti konečných automatů a sledových strojů; je vysvětlen rozdíl mezi Mooreho a Mealyho automaty a je podán jeho rekurzívní vztah. Jsou vysvětleny i pojmy zpoždění a abstraktního neuronu ve smyslu definice McCullochovy a Pittsovy, což je předchůdce současného pojmu umělé neuronové sítě. Poslední dvě kapitoly jsou věnovány algoritmům a Turingově stroji. Kniha je vhodná především pro inženýry a vědecké pracovníky, ale užitek přinese i pro biology a fyziology právě při studiu neuronových sítí. *(p, Ji)*

[2] Anselm z Canterbury. *Fides. Quaerens Intellectum.* Komenského evangelická bohoslovecká fakulta, Nakladatelství Kalich, Praha, 1990. 269 s.

> V této publikaci je obsažen známý Anselmův důkaz boží existence (Kapitola II–V), který byl možná předlohou Kurtu Gödelovi pro jeho důkaz vedený v modálních logikách. Doklad o tom, že Gödel Anselmův důkaz znal, však nemáme. *(Ji)*

[3] Aristoteles. *Kategorie (Organon I).* Nakladatelství ČSAV, Praha, 1958. Přel. A. Kříž. 86 s.

> Aristotelovy logické spisy, známé pod souborným názvem *Organon*, tj. *Nástroj*, patří stejně jako celé ostatní vědecké a filozofické dílo Aristotelovo k základním pilířům lidské vzdělanosti. Nauka o kategoriích tvoří spojovací článek mezi jeho filozofií, vyloženou v *Metafyzice*, a jeho vlastním logickým systémem, vybudovaným hlavně v *Prvních analytikách*. Problémy, které Aristoteles řešil v *Kategoriích*, nelze dodnes pokládat za zcela vyřešené. Proto si toto drobné dílko zasluhuje i naší pozornosti a jeho studium je velmi poučné pro každého, kdo se chce zabývat filozofií a logikou. *(p, Ji)*

[4] Aristoteles. *O vyjadřování (Organon II).* Nakladatelství ČSAV, Praha, 1959. Přel. A. Kříž. 45 s.

[5] Aristoteles. *První analytiky (Organon III).* Nakladatelství ČSAV, Praha, 1961. Přel. A. Kříž. 221 s.

První analytiky, které tvoří třetí část Aristotelova spisu *Organon*, obsahují jádro jeho formální logiky. Mimo jiné obsahují systematický výklad assertorického sylogismu. *(p, Ji)*

[6] Aristoteles. *Druhé analytiky (Organon IV)*. Nakladatelství ČSAV, Praha, 1962. Přel. A. Kříž. 190 s.

Po výkladu nauky o úsudcích v *Prvních analytikách* zabývá se Aristoteles v obou knihách *Druhých analytik* úvahami o vědeckém důkazu a o vědě. Aristotelovi nejde jen o uplatnění nauky o kategorickém sylogismu ve vědeckých důkazech, spíše usiluje o vytvoření metodologie deduktivní výstavby každé vědy. Touto problematikou se zabývá především v první knize *Druhých analytik*. Druhá kniha, v níž pojednává hlavně o definici, tvoří svým učením o čtyřech příčinách spojovací článek mezi jeho logickými a přírodovědeckými spisy. *(p, Ji)*

[7] Aristoteles. *Topiky (Organon V)*. Academia, Praha, 1975. Přel. A. Kříž. 295 s.

[8] Aristoteles. *O sofistických důkazech (Organon VI)*. Academia, Praha, 1978. Přel. A. Kříž. 133 s.

Šestý, závěrečný svazek spisu *Organon* navazuje bezprostředně na svazek *Topiky* a týká se eristiky, což je podle Aristotela "hašteřivé umění polemiky", zaměřené na oklamání protivníka a dosažení osobních výhod. Obsahuje přehled o cílech sofistické argumentace a popis jednotlivých druhů sofismat. Ve druhé části jsou obsažena řešení těchto klamných úsudků a návod jak se proti sofistickému způsobu argumentace bránit. *(p, Ji)*

[9] V. Auersperger. Nesprávné úsudky deduktivní. V Novém Bydžově, 1904. 47 s.

[10] R. Bek. *Úvod do logiky a metodologie věd*. ČVUT, Praha, 1970. 79 s.

[11] R. Bek. *Logika pro základní kurs*. ČVUT, Praha, 1972. 132 s.

[12] R. Bek. *Logika pro pedagogický kurs*. ČVUT, Praha, 1974. 134 s.

[13] R. Bek. *Kurz logiky*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1979. Skriptum pro postgraduální pedagogické studium pro učitele odborných předmětů na SOŠ. 124 s.

Zahrnuje výrokovou a predikátovou logiku. *(Ji)*

[14] R. Bek. *Logika.* Vydavatelství ČVUT, Praha, 1996. 119 s.

[15] K. Bendová. *Sylogistika.* Karolinum – nakl. Univerzity Karlovy, Praha, 1998. 102 s.

[16] L. Benyovszky a T. Kunca. *Úvod do logiky.* VŠE, Praha, 1991. 104 s.

Studijní pomůcka pro ekonomy a informatiky. Elementární úvod do výrokové logiky a predikátové logiky s identitou. Obsahuje stručnou kapitolu o různých modelech vysvětlení.

[17] K. Berka a M. Jauris. *Logika.* SPN, Praha, 1978. 207 s.

[18] K. Berka a M. Mleziva. *Co je logika.* SNTL, Praha, 1962. 231 s.

[19] K. Berka a J. Rybová. *Logika a metodologie pro žurnalisty.* Nakl. Novinář, Praha, 1988. Skriptum.

[20] K. Berka a L. Tondl. *Teorie modelů a modelování.* Svoboda, Praha, 1967. 302 s.

[21] K. Berka a I. Zapletal. *Logika pro studijní obor učitelství občanské nauky.* SPN, Praha, 1980. 100 s.

[22] K. Berka. *K dějinám výrokové logiky v antice.* ČSAV, edice Rozpravy ČSAV, Praha, 1959. 100 s.

[23] K. Berka. *O vzniku logiky.* Státní nakladatelství politické literatury, Praha, 1959. 97 s.

[24] K. Berka. *Aristoteles.* Orbis, Praha, 1966.

[25] K. Berka. *Logika pro novináře.* SPN, Praha, 1976. Druhé vyd. v roce 1980. 111 s.

[26] K. Berka. *Využití logiky v propagandistické praxi.* Svoboda, Praha, 1978. 61 s.

[27] K. Berka. *Bernard Bolzano.* Horizont, Praha, 1981. 133 s.

Publikace podává portrét významného pražského logika, matematika, filozofa a theologa.

[28] K. Berka. *Stručné dějiny logiky.* Karolinum – nakl. Univerzity Karlovy, Praha, 1994. Skriptum. 162 s.

Skriptum určené pro studující logiky na filozofické fakultě UK, studentům dalších oborů na našich vysokých školách i dalším odborníků a zainteresovaným laikům. První český ucelený nástin dějin logiky. Pokus vylíčit historický vývoj logiky od jejích počátků v antickém Řecku zhruba od V. stol. před n.l. – s přihlédnutím k obdobným snahám ve starověké Číně a Indii – až do prvních desetiletí našeho století. Zhuštěný výklad, který má spíše podnítit zájem o tuto problematiku. *(Ji)*

[29] V. Bibler. *Myšlení jako tvorba: úvod do logiky myšlenkového dialogu.* Mladá fronta, Praha, 1983. 250 s.

[30] D. T. Black. Jasné myšlení. Přerov, 1939.

[31] C. Bognár. Logika. Komárno, 1922. 168 s.

[32] B. Bolzano. Logika v kratičkém výtahu pro soukromé vyučování útlé mládeže. Praha, 1883. Přel. E. Schmutzrová. 32 s.

[33] B. Bolzano. *Paradoxy nekonečna.* Nakladatelství ČSAV, Praha, 1963. 150 s.

Bolzanův motiv jeho zkoumání nekonečna je dvojí: kritické zhodnocení základů matematiky a logiky. Nejasnosti spojené s některými pojmy v diferenciálním a integrálním počtu a neomezené používání některých matematických operací, v nichž se nekonečno skrývalo, vedlo k logickým sporům a tím k ohrožení matematiky vůbec. Bolzanův text je doplněn cennými poznámkami prof. O. Zicha, které poskytují nejen vysvětlení obtížnějších míst a upozornění na omyly, jichž se Bolzano dopustil, nýbrž i poukazy na spojitosti s dnešním stavem matematického a logického myšlení. *(p, Ji)*

[34] B. Bolzano. *Vědosloví (výbor).* Academia, Praha, 1981. 472 s.

Bolzanovo *Vědosloví* (s podtitulem: Pokus o zevrubný a převážně nový výklad logiky se stálým zřetelem k dřívějším zpracovatelům) vyšlo za hranicemi rakouské monarchie, u nakladatele J. E. von Seidla v bavorském Sulzbachu v roce 1837. Bolzano se jako vynikající matematik věnoval studiu filozofických základů matematiky. Byl plně přesvědčen, že matematika splňuje nejlépe ze všech věd ideál dokonalosti, nicméně i v tomto oboru je podle jeho mínění naše poznání značně kusé. Soudobý výklad matematiky považoval za málo uspokojivý, nacházel v něm řadu nepřesností i zjevné nejasnosti v pojetí takových důležitých geometrických pojmů, jakými jsou pojmy *přímka*, *plocha* či *těleso*. Bolzano si posléze uvědomuje, že tyto potíže jsou způsobeny logicky nepropracovaným a filozoficky nezdůvodněným pojetím matematické metody. Proto po vzoru G. W. Leibnize žádá důkazy, popř. zdůvodnění každé matematické věty bez výjimky – tedy i základních vět, jako jsou axiómy a postuláty. Bolzano však chápe pod matematickou metodou něco jiného než Leibniz nebo naše současnost. Nejde mu o matematizaci vědy. Jeho pozornost se plně soustřeďuje na metodologii definitorické a deduktivní výstavby vědeckých systémů, na otázky jejich učebnicového výkladu a na problematiku filozofické fundace vědy. Těmto otázkám je *Vědosloví* převážně věnováno. Samo *Vědosloví* představuje svým rozsahem obrovský vědecký projekt. Jsou to čtyři svazky o celkovém rozsahu téměř 2400 s. *(Ji)*

[35] R. Carnap. *Problémy jazyka vědy (výbor prací).* Svoboda, Praha, 1968. 343 s.

Výbor významných Carnapových statí, původně publikovaných časopisecky, ve sbornících nebo jako kapitoly v monografiích. Statě mapují Carnapovy názory v oblasti metodologie, logiky, sémantiky a základů matematiky, a to v období let 1935–1962. Práce "Formální a reálné vědy" se zabývá klasifikací věd a rozdílem mezi formálními a reálnými (tj. empirickými) vědami. Vztah mezi smyslem věty, její verifikovatelností a potvrditelností je řešen v rozsáhlém článku "Testovatelnost a smysl". 'Minimonografie' nazvaná "Základy logiky a matematiky" se zabývá syntaxí a sémantikou jazyků formálních a reálných věd, formalizovanými teoriemi v příslušných oborech a otázkami základů matematiky. Studie "O explikaci" vymezuje metodologické požadavky na vědeckou explikaci. Článek "Dva pojmy pravděpodobnosti" se zabývá základy pravděpodobnosti, explikací sémantického pojmu potvrzení, logickou povahou pojmu pravděpodobnosti a jeho různými intepretacemi a induktivní logikou. Na problematiku abstraktních entit v sémantice je zaměřena stať "Empiricismus, sémantika a ontologie". Článek "Významové postuláty" přináší explikaci pojmu analytičnosti (tj. pravdivosti založené na smyslu) v logickém systému na základě zavedení pojmu významového postulátu. Analýzu pojmů extenze, intenze a významu přináší stať "Význam a synonymie v přirozených jazycích". V práci "Metodologický charakter teoretických pojmů" je vymezen observační jazyk a teoretický jazyk, popsán jejich vzájemný vztah a formulováno kritérium smyslu pro teoretické termíny. Poslední stať, "Cíl induktivní logiky" obsahuje konstrukci induktivní logiky, která je založena na přechodu od subjektivního pojetí pravděpodobnosti k logickému pojetí pravděpodobnosti. *(Ko)*

[36] R. Carnap. Překonání metafyziky logickou analýzou jazyka. *Filozofický časopis*, 39:622–643, 1991. Přeložil K. Berka.

[37] L. Caroll. *Logika hrou.* Pressfoto, Praha, 1971.

V knížce je popsána jednoduchá metoda, jak pomocí diagramů znázornit úsudky, které mají formu sylogismů, a rozlišit platné sylogismy od neplatných. Carroll uvádí množství užitečných příkladů na řešení sylogismů, kontrolní otázky a příklady nejčastějších chyb. *(Ko)*

[38] J. Ciger. Základy infinitezimálnej logiki a jej axiómy. Bratislava, 1949. 118 s.

[39] V. Čechák, K. Berka a I. Zapletal. *Co víte o moderní logice.* Horizont, edice MME, Praha, 1981. 326 s.

Populárně vědecká publikace, která může posloužit pro první (ale poměrně obsáhlé) seznámení s předmětem, metodami a proudy moderní logiky. Obsahuje též krátký exkurs z dějin logiky od antického Řecka až po Gödelovy výsledky a rozvoj neklasických logik. Výklad probíhá v duchu Churchova "Úvodu" od podmínek výstavby formalizovaného jazyka logiky a základních sémanticky motivovaných úvah, přes přehled výrokové logiky (včetně funkční úplnosti a normálních forem) a predikátové logiky 1. řádu, axiomatickou metodu a dedukční teorém. Jsou zmíněny základy teorie množin a popsán gentzenovský systém přirozené dedukce a sekvenční počet. Místo je věnováno i některým neklasickým logikám (vícehodnotové l., modální l., intucionistická l., erotetická l. a deontická l.). Dodatek je věnován úvodu do teorie definic a některým aplikacím logiky v rozhodování a řešení reléových sítí. Čtenář by se neměl nechat odradit dobovým ideologizujícím úvodem. *(Ko)*

[40] V. Čechák. *Logika.* Vys. škola politická ÚV KSČ, Praha, 1976.

[41] K. Čulík, M. Skalická a I. Vránová. *Logika I.* SNTL, Praha, 1968. 82 s.

[42] J. Dastich a V. Jandečka. *Logika pro vyšší gymnasia.* Nákladem kněhkupectví I. L. Kobler, Praha, 1880. 100 s.

[43] J. Dastich. *Formální logika. Filosofická propaedeutika.* Nakl. F. Skrejšovský, Praha, 1867. Sv. 1. 173 s.

[44] M. Demlová a B. Pondělíček. *Matematická logika.* Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997. 160 s.

Obsahuje základní pojmy z teorie množin, relací a grafů, výrokovou a predikátovou logiku. Pojednává též o rezoluční metodě dokazování.

[45] J. Dewey. Logika soudů praktických, zejména hodnotících. Praha, 1926. 30 s.

[46] M. Dokulil. *Úvod do studia logiky. Pomůcka k přednáškám pro pedagogy.* UJEP, Brno, 1965. 85 s.

[47] M. Dokulil. *Elementární kurs logiky.* UJEP, Brno, 1968. 55 s.

[48] M. Dokulil. *Logika pro pedagogy, Klíč k logice pro pedagogy.* Ústav pro učitelské vzdělávání UK, SPN, Praha, 1970. Skriptum. *Klíč k logice pro pedagogy* je samostatnou knihou. *Logika pro pedagogy* – 192 s.

[49] A. Dratvová. Logika. Filosofická propedeutika pro všechny typy gymnasijní. Praha, 1930. 144 s.

[50] A. Dratvová. Logika a lidé. Praha, 1944. 128 s.

[51] M. Dymáček. *Matematická logika.* UJEP, Brno, 1968.

[52] B. Eichler, R. Ryska a V. Svoboda. *Základy státoprávní teorie, ekonomie a ekonomiky, neformální logiky.* Fortuna, Praha, 1995. 165 s.

[53] K. Engliš. Horror finalitatis.Poznámky k logice J. Tvrdého. *Česká mysl*, 3–4:140–189, 1939. Zvláštní otisk.

[54] K. Engliš. *Malá logika.* Melantrich, Praha, 1947. 511 s.

[55] K. Engliš. *Theorie hodnoty a hodnocení.* Melantrich, Praha, 1947. 89 s.

[56] B. Fajkus. *Současná filosofie a metodologie vědy.* FILOSOFIA, Praha, 1997. 136 s.

Pojednává o následujících tématech (odpovídá názvům kapitol): Novopozitivistické pojetí vědy a filosofie, falzifikační model vědy K. R. Poppera, logicko-rekonstrukcionistické pojetí filosofie vědy, historická a holistická koncepce vývoje vědy, metodologie vědeckých výzkumných programů, metodologický anarchismus P. K. Feyerabenda, současný stav a tendence.

[57] V. Filkorn. *Prehegelovská logika.* SAV, Bratislava, 1953. 294 s.

[58] V. Filkorn. *Metóda vedy.* SAV, Bratislava, 1956. 202 s.

[59] V. Filkorn. *Úvod do metodológie vied.* SAV, Bratislava, 1960. 414 s.

[60] R. Folk a J. Svatek. *Symbolická logika.* VŠ strojní a elektrotechnická, Plzeň, 1970. 139 s.

[61] R. Folk. *Kapitoly z logiky.* Pedagogická fakulta, Plzeň, 1978. 113 s.

[62] G. Frege. O smyslu a významu. *SCIENTIA & PHILOSOPHIA*, 4, 1993. Přel. J. Fiala.

Jde o český překlad Fregova zakladatelského článku, který je publikován spolu s německým originálem. Frege se ptá, co říká tvrzení tvaru a=b. Je to tvrzení o znacích "a" a "b"? Anebo je to tvrzení o objektech označených znaky "a" a "b"? Rozsahem nevelký článek, v němž si Frege kromě jiného klade otázku o povaze tvrzení o identitě, je dnes považován za text, který položil základy tzv. fregeovské sémantiky, fakticky odstartoval program logické analýzy přirozeného jazyka a který představuje prvopočátek celého projektu moderní filosofie jazyka. V práci je formulována proslulá Fregova sémantická teorie o smyslu a významu. *(Ko)*

[63] E. Fuchs. *Logika a teorie množin.* UJEP, Brno, 1978. 175 s.

[64] J. Fuchs. *Filosofie – Úvod do filosofie. 1. Filosofická logika.* Čs. provincie Řádu bratří kazatelů, edice Krystal, Praha, 1993.

[65] J. Fuchs. *Kritické úvahy II, III.* Krystal OP, Praha, 1994. 86 s.

[66] F. Gahér. *Logika pre každého.* IRIS, Bratislava, 1994. 269 s.

[67] Galénos. *Úvod do logiky.* Nakladatelství ČSAV, Praha, 1958. Přel. R. Hošek. Další vyd. v roce 1967. 79 s.

S úvodní studií Karla Berky o Galénově *Eisagogé dialektiké* a jejím významu pro dějiny logiky (s. 5–23) a s komentářem na s. 55–47.

[68] Š. Gelenius (Jelenský) Sušický. Logika. Praha, 1926. 212 s.

Jedná se o vydání rukopisu ze 16. století, které pro I. třídu České akademie věd a umění připravil Čestmír Stehlík. Obsahuje úvodní pojednání od Josefa Krále: České logiky humanistické.

[69] D. P. Gorskij. *Otázky abstrakcie a tvorenie pojmov.* Vydavateľstvo politickej literatúry, Bratislava, 1963. 351 s.

[70] A. Grzegorczyk. *Populární logika.* SNPL, Praha, 1957. 128 s.

[71] J. Hájek. *Úvod do teorie množin a matematické logiky.* UJEP, Brno, 1975. 168 s.

[72] P. Hájek a V. Švejdar. Matematická logika. Předběžný učební text. Pouze v elektronické podobě, 1994.

[73] H. J. Hanuš. Nástin logiky na základě metafysickém. Praha, 1850. 112 s.

[74] M. Hemelík. *Exercitium logicum.* VŠE, Praha, 1994. 53 s.

[75] J. Hladík. *Společenské vědy v kostce (pro střední školy).* Fragment, Havlíčkův Brod, 1996. Kapitola *Základy neformální logiky*, str. 98–105.

[76] J. Hrubeš. *Logika pro studijní obor učitelství občanské nauky.* Pedagogická fakulta, Ostrava, 1988. 193 s.

[77] J. Hrubeš. *Uplatnění logiky ve výuce občanské výchovy.* Scholaforum, Ostrava, 1996. Tematický sešit Občanská výchova. 22 s.

[78] K. Hruša. *Logický podklad matematických úsudků.* Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1950. 36 s.

[79] E. Chalupný. *Logika věd.* Vyd. Jan Pohořelý, Praha, 1945. 92 s.

[80] N. Chomsky. *Syntaktické struktury. Logický základ teorie jazyka.* Academia, Praha, 1966. 209 s.

[81] A. Church. *Úvod do matematické logiky.* UJEP, Brno, 1977.

[82] J. Ivánek. *Logika pro obor EMV.* SPN, Praha, 1983. Skriptum. 73 s.

[83] I. M. Jaglom. *Podivuhodná algebra.* Mir, Moskva, 1984. 72 s.

[84] V. Janák. *Základy logiky.* Univerzita Palackého, Olomouc, 1972. 45 s.

[85] V. Janák. *Základy formální logiky.* SPN, Praha, 1973. 235 s.

Ojedinělá programovaná učebnice logiky, v níž jsou klasický výrokový kalkul a klasický predikátový kalkul budovány jako formalizované teorie v Gentzenově systému přirozené dedukce. Kniha se tak odlišuje od většiny jiných (českých) učebnic, v nichž jsou upřednostňovány spíše sémantické metody (pravdivostní tabulky či stromy) nebo axiomatická metoda. Učebnice je precizně a didakticky neotřele zpracovaným úvodem do klasické moderní logiky a důkazové metody přirozené dedukce. Jsou předvedeny i metamatematické výsledky o bezespornosti a úplnosti příslušných kalkulů. Kniha obsahuje množství příkladů, kontrolních otázek a cvičení na konstrukci důkazů teorémů. *(Ko)*

[86] M. Jauris a P. Materna. *Logika.* SPN, Praha, 1957. Učební text pro 11. postupný ročník všeobecně vzdělávacích škol a pro školy pedagogické. 160 s.

[87] M. Jauris. *Logika.* SPN, Praha, 1970. Učebnice pro střední školy. 208 s.

[88] M. Jauris. *Základy neformální logiky.* S&M, Praha, 1992. 63 s.

Učební text pro studenty středních škol. V části I. Odvození a protipříklad jsou s minimálním formálním aparátem vyloženy základní pojmy a dovednosti formální logiky (odvozování, vyplývání, protipříklad). V části II. Induktivní odvozování jsou obsaženy základní informace o indukci prostým výčtem, úsudku z analogie a statistickém usuzování. Část III. Jazyk a komunikace uvádí do problematiky logické sémantiky. Část IV. Argumentace a V. Chybné argumentace obsahují klasifikační systém chybných argumentací s výkladem a ukázkami jednotlivých chyb. Závěrečná část VI. Argumentace v praxi upozorňuje na psychologické a etické problémy argumentace a končí výkladem pojmů *eristika* a *rétorika.* *(Za)*

[89] M. Jelínek. *Logické prvky ve školské matematice.* SPN, Praha, 1981. 199 s.

[90] W. S. Jevons. *Počátkové logiky.* Filosofická bibliotheka, Česká Akademie cís. Františka Josefa, Praha, 1906. Přel. O. Josek. 128 s.

[91] P. Jirků a J. Kelemen. *Kapitoly z kognitivní vědy. (Racionalita z hlediska chování, jazyka a logiky).* VŠE FIS, Praha, 1996. 104 s.

Jde o snahu zabývat se racionalitou z různých hledisek. Jde o to, pochopit racionalitu jako vlastnost některých systémů, která má emergentní povahu, tj. vyvstává jakoby "svévolně" ze soustavy reakcí těchto systémů na podněty, které přijímají ze svého okolí nebo z reprezentace tohoto okolí ve svých pamětích a na které reagují podle svého ustrojení. *(Ji)*

[92] P. Jirků a P. Materna. *Znalosti, logika, usuzování.* Sborník Sofsem '90, Janské lázně, 1990. str. 138–164.

[93] P. Jirků a M. Mleziva. *Základy matematických metod pro automatizovanou analýzu dat v experimentálním výzkumu.* Univerzita Karlova, Praha, 1979. Část I. Skriptum FF UK. 51 s.

[94] P. Jirků a V. Švejdar, editoři. *Miscellanea Logica. Tom I.* Karolinum – nakl. Univerzity Karlovy, Praha, 1998. 86 s.

[95] P. Jirků. *Logika (Neformální úvod do formální logiky).* VŠE, Praha, 1993. Skriptum. 108 s. Dostupné též na Internetu: http://www.cuni.cz/~jirkup.

Skriptum původně určené pro studenty informatiky Vysoké školy ekonomické v Praze. Je psáno velmi zhuštěnou formou, záměrem bylo, aby sloužilo jako doplněk ke stejnojmenné přednášce. Týká se výrokové a predikátové logiky, formalizovaných teorií, neklasických logik (vícehodnotové logiky, modální logiky a intuicionistická logika). Zvláštní kapitola je věnována zpracování neúplné informace a aktualizaci znalostí.

[96] P. Jirků. Lambda calculus. Poznámky o kalkulu funkcí a jeho modelech. V tisku. 1998.

[97] P. Jirků. Matematické struktury (Množiny, zobrazení, struktury. Logika. Vybrané aplikace). In: Havránek, T. et al. *Matematika*

pro biologické a lékařské vědy. Kapitola I. Str. 11–64. Academia, Praha, 1981.

[98] E. Kadeřávek. *Logika formálná.* Dědictví sv. Prokopa, Praha, 1887. 176 s.

[99] O. Kádner. O kvantifikaci predikátu. Rychnov nad Kněžnou, 1867. Gymnaziální program.

[100] M. Katětov. *Jaká je logická výstavba matematiky.* Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1952. 248 s.

[101] V. Knapp a A. Gerloch. *Logika v právním myšlení.* Ústav státní správy, Praha, 1983. 123 s.

[102] V. Knapp a A. Gerloch. *Příručka ke studiu právní logiky.* Univerzita Karlova, Praha, 1988. 32 s.

[103] V. Knapp, P. Holländer et al. *Právné myslenie a logika.* Obzor, Bratislava, 1989. 340 s.

[104] J. Kolář, M. Chytil a O. Štěpánková. *Logika, algebra, grafy.* SNTL/Alfa, Praha, 1989. 434 s.

Vysokoškolská učebnice autorů z ČVUT a UK, jejíž prvních 90 stran je věnováno formální logice. Rigorózní matematickou formou je vyložena výroková a predikátová logika. Relevantní jsou ovšem i následující kapitoly o relačních strukturách, algebraických strukturách a jejich příkladech: svazech, booleovských algebrách, grupách atd. *(Ji)*

[105] P. Kolář a V. Svoboda. *Logika a etika.* FILOSOFIA – nakl. FÚ AV ČR, Praha, 1997. 276 s.

[106] A. Kolman a O. Zich. *Zajímavá logika.* Mladá fronta, Praha, 1965. 58 s.

[107] A. Kolman. *Logika.* Svoboda, Praha, 1947. 183 s.

Jde o učebnici logiky, kterou autor napsal v roce 1942 pro střední školy v bývalem Sovětském svazu. Toto české vydání je třetí variantou původní učebnice, napsanou již česky v Praze roku 1946. "Logika je věda, která zkoumá zákony, formy a metody správného myšlení, věrně obrážejícího skutečné věci". Již tato autorova definice logiky ukazuje, že jde o tradiční výklad logiky, dosti poplatný tehdejší ideologii. Vedle kapitol věnovaných pojmu, soudu a úsudkům (deduktivním, induktivním, analogickým a nesylogistickým) jsou zde dvě zajímavé kapitoly: Metody vědeckého poznání (kde jsou – mimo jiné – vyloženy "logické metody empirického bádání" a metody důkazu) a logické chyby, sofismata a paradoxy. *(Za)*

[108] A. Kolman. *Kritický výklad symbolické metody moderní logiky.* Orbis, Praha, 1948.

[109] J. Kopka. *Matematická logika.* Ústav pro učitelské vzdělání, UK, Praha, 1973. Skriptum. 124 s.

[110] I. Korec. *Predikátový počet prvého rádu s funkciami.* Univerzita Komenského, Bratislava, 1978. Skriptum. 138 s.

[111] J. Koreň. Logika. Prešov, 1923.

[112] J. Král. České logiky humanistické. Praha, 1926.

[113] H. Kraml, M. Altrichter, B. Miltová, M. Špirková, M. Štěpánková a K. Říha. *Logická propedeutika.* Matice cyrilometodějská, Olomouc, 1994. Skriptum k přednášce H. Kramla. 154 s.

[114] H. Kraml et al. *Teorie poznání a hermeneutika.* Matice cyrilometodějská, Olomouc, 1994.

[115] A. Krecar. Česká literatura logická, 1893. Program gymnázia ve Slaném.

První soustavnější snaha o soupis české literatury oboru logika. Bohužel nám není k dispozici.

[116] F. Krejčí. *Logika.* Nakl. I. L. Kober, Praha, 1914. 158 s.

Třetí, opravené, vydání z r. 1914 (další vydání 1921) obsahuje tři části: Úvod, část elementární a část vědoslovnou. Jde o tradičně pojatou učebnici v níž je logika chápána jako "… věda o správném myšlení". Díky tomuto vymezení jsou zahrnuty i některé psychologické aspekty, které dnes do formální logiky jistě nezařazujeme a formální správnost úsudků neodkazujeme do oblasti psychologie. V části elementární je pojednáváno o poměru řeči a myšlení, o pojmu, o soudu (v moderní terminologii o výroku), jeho druzích a správnosti, o úsudku (logickém důsledku, tradiční sylogistice, induktivních úsudcích a úsudcích z analogie). Část vědoslovná je věnována potřebě soustavnosti ve vědě, pojmu definice, třídění věd a různým druhům vědeckých metod (dedukce, indukce, pozorování, experiment, srovnávací metoda a metoda statistická). Publikace má dnes význam spíše jen historický, ukazuje stav české logiky na počátku dvacátého století. *(Ji)*

[117] J. Kříž. *Logika.* VUT v Brně, SNTL, Praha, 1974. 228 s.

[118] F. Kuřina. *Množiny, logika a vyučování matematice na ZŠ.* Pedagogická fakulta, Hradec Králové, 1982. 87 s.

[119] Z. Lahulek-Faltys. Základy logiky pro každého. Praha, 1926. 175 s.

[120] V. Lamser. *Teorie a metodologie vědy a úvod do moderní logiky.* VŠ zemědělská, Praha, 1975. 140 s.

[121] G. W. Leibniz. *Nové úvahy o lidské soudnosti od autora systému předzjednané harmonie.* Česká Akademie věd a umění, Praha, 1932. 525 s.

Přeložila Věra Rychetská, úvodem, poznámkami a doplňky opatřil František Krejčí. Toto dílo vyšlo knižně až padesát let po Leibnizově smrti.

[122] G. A. Lindner. *Obecné vyučovatelství.* A. Pichler, Vídeň, 1893. 87 s.

[123] A. Lukasová. *Logické základy umělé inteligence 1, Výroková a predikátová logika.* Ostravská univerzita, Ostrava, 1995. Skriptum. 154 s.

[124] M. Machovec. *Logika.* Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951. 167 s.

[125] M. Machovec. *Logika.* Rovnost, Praha, 1952. 248 s.

[126] J. Malina a J. Novotný, editoři. *Kurt Gödel.* Nadace Universitas Masarykiana, Brno, 1996. 268 s.

Portrét snad nejvýznamnějšího logika dvacátého století. Tato první česká monografie věnovaná životu a dílu Kurta Gödela vyšla v *Edici*

Osobnosti u příležitosti jeho nedožitých devadesátin. Vedle životopisných statí a statí dokumentujících jak inspirativní je i dnes Gödelovo dílo jsou zahrnuty i tři Gödelovy stěžejní články: *Úplnost axiomů predikátového kalkulu logiky; O formálně nerozhodnutelných větách v díle* Principia Mathematica *a příbuzných systémech I; Poznámka o vztahu mezi teorií relativity a idealistickou filozofií.* Publikace, která by neměla uniknout pozornosti studentům logiky, matematiky, fyziky či filozofie i když překlady původních Gödelových statí nejsou vždy zcela přesné. *(Ji)*

[127] A. J. Marcinkech. *Základy logiky pre pedagogické štúdium.* Univerzita Komenského, Bratislava, 1975. 90 s.

[128] A. Marek. Logika nebo umnice. Praha, 1820. 210 s.

(1785–1877) Zdařilý pokus o základy filozofického názvosloví podle Kiesewettra a Kruga. Pracoval intenzivně na Jungmannově slovníku.

[129] A. Marek. Základní filosofie, logika, metafysika. *Logika neb mysloveda*, str. 45–188, 1847. Nákladem českého musea. Praha.

[130] T. G. Masaryk. *Základové konkrétné logiky (Třídění a soustava věd).* Bursík & Kohout, Praha, 1885. 201 s.

Masaryk konkrétní logikou (původní termín *konkrétná logika*) rozumí “program nové vědy logické”. Tuto logiku odlišuje od logiky užité, která “jedná o pozměněných všeobecných logických formách a pravidlech” – a o to autorovi nejde. Logiku – v nejobecnějším slova smyslu – považuje “ve smyslu Aristotelově jakožto vědu o pravidlech, kterými duch náš při přesné práci vědecké se spravuje”. Je to věda *apriorní*, Masarykovi pak jde o *logiku praktickou.* “Konkrétná logika podává klasifikaci všech věd, ba třídí snad všeliké činnosti lidské a buduje jednotnou a přirozenou soustavu všeho vědění.” Podle tohoto autorova vymezení je celá kniha návrhem klasifikace věd, jak tomu odpovídá i obsah, který je velmi obsáhlý a podává dostatečný přehled o celém klasifikačním systému. Logika – vedle jazykozpytu a aesthetiky – je součástí soustavy věd theoretických a předně abstraktných, ovšem je vědou, která stojí mimo stupnici, podle které autor svoji klasifikace realizuje. *(Za)*

[131] P. Materna, K. Pala a J. Zlatuška. *Logická analýza přirozeného jazyka.* Academia, Praha, 1989. 144 s.

Kniha uvádí do problematiky logické analýzy jazyka, jejích metod a aplikací. Logická analýza jazyka je charakterizována jako věda o sémantických zákonitostech jazyka a neempirických vztazích a vlastnostech jazykových výrazů. Logický systém, v němž jsou příslušné analýzy prováděny, je Transparentní intenzionální logika (TIL), vytvořená českým logikem Pavlem Tichým. Kniha je přístupným úvodem do TIL a přehledem metod i originálních řešení některých problémů současné logické analýzy jazyka. Kromě aplikace TIL na logickou analýzu jazyka je popsána i aplikace TIL v teorii informačních systémů (pro formálně přesné vymezení pojmů v oblasti práce s databázovými systémy). *(Ko)*

[132] P. Materna. *Umíte logicky myslet?* SPN, Praha, 1968. 139 s.

[133] P. Materna. *Úvod do logiky.* SPN, UJEP, Praha, Brno, 1968.

Skripta pro třísemestrový kurs logiky na filosofické fakultě. Jde o dobře zpracovaný učební text, zahrnující standardní výklad klasické logiky pro filosofy (výroková logika, predikátová logika 1. řádu, logika tříd a logika dvojčlenných relací) a základy teorie deduktivních systémů. Část o deduktivních systémech obsahuje přístupný výklad pojmu formalizované teorie, důkazu, základních pojmů logické sémantiky (úplnost, vyplývání, splnitelnost, pravdivost). Dodatek obsahuje výklad některých tzv. technických aplikací logiky (booleovské algebry, "2-systém", normální formy, Quineova minimalizační procedura). Text celkově klade důraz na sémantické metody v logice. *(Ko)*

[134] P. Materna. *Svět pojmů a logika.* FILOSOFIA – nakl. FÚ AV ČR, Praha, 1995. 132 s.

Problémově orientovaná logicko-filosofická studie knižního rozsahu. Maternovým cílem je rehabilitovat pojem pojmu v kontextu moderní logiky, podat jeho intuitivně přijatelnou a přitom logicky přesnou explikaci a konečně vybudovat exaktní logickou teorii pojmů, v jejímž rámci by bylo možno řešit tradiční i nově se vynořivší problémy v oblasti logické analýzy jazyka, filosofické logiky, analytické filosofie či filosofie logiky. Materna buduje realistickou teorii pojmu (pojmy jsou objektivně existující abstraktní entity) v systému Transparentní intenzionální logiky (TIL), vytvořené Pavlem Tichým. Základní teze knihy jsou tyto: 1) Pojmy nejsou jazykové výrazy. 2) Většina výrazů daného jazyka reprezentuje určitý pojem. 3) Některé výrazy daného jazyka reprezentují více než jeden pojem. 4) Někdy je týž pojem reprezentován více různými výrazy. 5) Pojem se může stát významem (smyslem) daného výrazu. 6) Pojmy jsou objektivní abstraktní entity, které mohou být reprezentovány výrazy jazyka. 7) Pojmy identifikují objekty. Jsou to jakési identifikační procedury, které lze v logice modelovat pomocí pojmu konstrukce zavedeném v TIL. *(Ko)*

[135] J. S. Mill. *Pojem a obor logiky.* Program gymnasia v Truhlářské ul., Praha, 1892. Přel. a poznámkami opatřil univ. prof. Fr. Čáda.

[136] M. Mleziva. *O trojhodnotové logice.* Rozpravy ČSAV, řada spol. věd, č. 13, Praha, 1964. 66 s.

[137] M. Mleziva. *Neklasické logiky.* Svoboda, Praha, 1970. 232 s.

Jde o "pokus o poměrně souhrnný a soustavný výklad problematiky nejdůležitějších systémů neklasických logik, o nastínění jejich předpokladů, východisek a motivů vzniku. Celý výklad prostupuje konfrontace s klasickou logikou jako dominujícím a přitom kritizovaným systémem a jsou zdůrazňovány odlišnosti a jejich důvody." Publikace je napsána přehledně a srozumitelně, sledování výkladu nevyžaduje žádné specifické mimologické znalosti, pouze základní orientaci v logických kalkulech na úrovni nějaké elementární učebnice nebo kursu. Výklad je veden ve výrokové logice. Problematika predikátové logiky není v zájmu srozumitelnosti textu diskutována. Diskutovány jsou tyto logické systémy: klasická výroková logika, intuicionistická logika, modální logiky a logiky striktní implikace, vícehodnotové logiky a vztahy mezi klasickou logikou a neklasickými systémy, vztahy obsažení a princip tolerance. *(Ji)*

[138] O. S. Morden. Divotvorná moc správného myšlení, 1913. Druhé vyd. 1919.

[139] V. Mráz. *Logika pro pedagogy.* SPN, Praha, 1985. 201 s.

[140] V. Novák. *Fuzzy množiny a jejich aplikace.* SNTL, Praha, 1990. 280 s.

V češtině průkopnická monografie, uvádějící matematický aparát umožňující určitým způsobem modelovat vágnost. Jádrem tohoto aparátu je Zadehova teorie fuzzy množin. Publikace je rozdělena na teoreticku a aplikační část. Teoretická část je obsáhlým úvodem do teorie fuzzy množin, modelování sémantiky pomocí fuzzy množin a úvodem do fuzzy logiky. Fuzzy logika je prezentována jak v podobě vícehodnotové logiky na reziduovaných svazech (podle Goguena a Pavelky), tak v podobě Zadehovy 'lingvistické' logiky. Aplikační část seznamuje s konkrétním využitím fuzzy množin a fuzzy logiky v rozhodování a řízení, ve fuzzy systémech, fuzzy algoritmech a programovacích jazycích. Závěr je věnován obecným problémům fuzzy množin, které se dotýkají například teoretických základů samotného aparátu, vztahu alternativní teorie množin a teorie fuzzy množin či problému axiomatizace fuzzy množin. *(Ko)*

[141] B. Pascal. *O geometrickém duchu, O umění přesvědčovat.* Vyšehrad, Praha, 1985. In: Petr Horák; *Svět Blaise Pascala*, str. 231–264.

[142] F. Pelikán a B. Dratvová. *Logika.* SFINX, Praha, 1926. 256 s.

Podobně jako kniha Františka Krejčího je obrazem české logiky své doby. Obsahuje elementární část (logiku formální: nauku o tvoření pojmů, nauku o soudu a nauku o úsudku) a vědosloví (systematiku a pojednání o metodách). Publikace je doplněna jmenným rejstříkem a slovníčkem logických pojmů. Je sedmým svazkem Školy vševědné pod redakcí univ. prof. dr. Otakara Kádnera. *(Ji)*

[143] F. Pelikán. *Logika a etika záporu.* G. Volenský, Vinohrady, Praha, 1923.

[144] J. Peregrin. *Logika ve filozofii, filozofie v logice (Historický úvod do analytické filozofie).* Herrmann a synové, Praha, 1992. 124 s.

Knížka zprostředkovává první setkání s některými partiemi a metodami analytické filosofie. Představuje některé zakladatelské osobnosti tohoto proudu, jejichž práce se výrazně zapsaly i do vývoje moderní logiky (Frege, Russell, Carnap, Wittgenstein, Quine). Výklad je orientován na rozvoj moderní logiky a sémantiky, logickou analýzu přirozeného jazyka a užití logických metod ve filosofii. V příloze je připojen i stručný přehled nejdůležitějších logických sytémů včetně modální logiky, intenzionální logiky a extenzionální teorie typů. *(Ko)*

[145] J. Peregrin. *Úvod do teoretické sémantiky.* Masarykova univerzita, Brno, 1994. Skriptum.

[146] J. Peregrin. *Úvod do teoretické sémantiky: principy formálního modelování významu.* Karolinum – nakl. Univerzity Karlovy, Praha, 1998. Skriptum. 206 s.

[147] Co je analytický výrok. OIKOYMENH, Praha, 1995. Překl. J. Peregrin, P. Sousedík, S. Sousedík.

Sborník překladů textů týkajících se problému analytičnosti výroků od význačných myslitelů jakými byli: I. Kant, J. S. Mill, G. Frege, A. J. Ayer, L. Wittgenstein, N. Malcolm, W. Van Orman Quine, H. P. Grice, P. F. Strawson a H. Putnam. S předmluvou prof. S. Sousedíka. *(Ji)*

[148] B. Pilotti. Umění řečnické. S dodatkem o logičnosti myšlení a jednání. Praha, 1923.

[149] A. Procházka. *Logika.* SNTL, Praha, 1968. 46 s.

[150] F. Procházka. Logika. pro střední školy. Praha, 1906.

[151] W. van Orman Quine. *Hledání pravdy.* Herrmann a synové, Praha, 1994. Přeložil J. Peregrin.

Quinův "pokus doplnit, shrnout a vyjasnit svoje různě se prolínající názory na kognitivní význam, odkazování k předmětům a základy vědění." *(Ji)*

[152] J. Rachůnek. *Logika.* Universita Palackého, Olomouc, 1986.

[153] B. Russell. *Logika, jazyk a věda.* Svoboda, Praha, 1967. Přeložil a uspořádal K. Berka a L. Tondl. 279 s.

[154] B. Russell. *Zkoumání o smyslu a pravdivosti.* Academia, Praha, 1975. Přel. J. Husák. 378 s.

[155] B. Russell. *Logika, věda, filozofie, společnost.* Svoboda, Praha, 1993. 276 s.

Ve svém díle zasahuje významným způsobem nejen do oblasti logiky, matematiky a filozofie matematiky, v čemž spočívá jeho největší význam a přínos pro vědu, ale také do filozofie vůbec, ekonomie, sociologie, psychologie, etiky, politiky, ba i do krásné literatury. Publikace obsahuje čtyři kapitoly: Logika a matematika, Věda, Filozofie a Člověk a společnost. *(p, Ji)*

[156] R. Ryba. *Úvod do logiky.* VŠE, Praha, 1970. 115 s.

[157] J. Sedláček. Logika pro střední školy. Praha, 1898. 128 s.

[158] O. Selucký. *Logika pro střední školy.* FORTUNA, Praha, 1995. 240 s.

Netradiční pojednání o logice s cílem "probudit potřebu uvažovat o svém myšlení". Kniha je určena těm, kteří o svém myšlení dosud soustředěněji neuvažovali. Obsahuje řadu dialogů a příkladů. Teoretický výklad je veden na převzatých textech. Týká se nejen úsudků, ale i odůvodňování a metod argumentace (i mimologických).

[159] R. M. Smullyan. *Jak se jmenuje tato knížka?* Mladá fronta, Praha, 1978. 216 s.

Půvabná knížka, která formou hádanek, přístupných i pro dětského čtenáře, uvádí do tajů jindy obávané disciplíny jakou je matematická logika. Navíc, Raymond Smullyan komukoliv, kdo je ochoten nezaleknout se onoho zdánlivě tak odstrašujícího oboru a zvědavě nahlížet za jeho pojmové kulisy, přesvědčivě ukáže, že se mozek nezauzlí, že naopak bude až překvapen, jak zábavné je takové logické uvažování a kolik sebeuspokojení dokáže člověku připravit. R. Smullyan je natolik svrchovaný myslitel, že se i na vlastní obor dokáže dívat s odstupem člověka, který ví, že jeho zamilovaná disciplína je sice nadmíru důležitá, že však zdaleka není klíčem k pochopení všeho toho, čemu se sumárně říká život. *(Ji)*

[160] R. M. Smullyan. *Logika prvého rádu.* Alfa, Bratislava, 1979. 212 s.

Smullyanova kniha se zabývá logikou prvního řádu, přesněji teorií kvantifikátorů prvního řádu (lze kvantifikovat pouze přes individua, nikoli přes predikáty) bez identity. Výklad je veden metodou analytických tabulek. Tato metoda svou originalitou a jednoduchostí umožňuje dokázat platnost formulí logiky prvního řádu velmi snadno a elegantně. Kniha je budována přísně formálními prostředky s velkým počtem definic, lemmat, teorémů a důkazů, ale nic to neubírá na srozumitelnosti a zajímavosti. Svým obsahem i formou zpracování zaujme nejen logiky, ale i ostatní odborníky, učitele i studenty. Kniha stále patří mezi špičková díla v této oblasti na světě. *(p, Ji)*

[161] F. Soukup. *Psychologie a logika pro kandidáty učitelství škol zemědělských.* ČS Akademie Zemědělská, Praha, 1935. 147 s.

[162] S. Sousedík. *Jan Duns Scotus.* Vyšehrad, Praha, 1989.

[163] D. Spasov. *Od logiky k sociologii.* Svoboda, Praha, 1983. 165 s.

[164] J. Strach. *Základy logiky.* UJEP, Brno, 1986. 96 s.

[165] M. S. Strogovič. *Logika.* Štátne naklad., Bratislava, 1951. 286 s.

[166] J. Sup. *Logika: Učební text pro postgraduální doplňkové pedagogické studium inženýrů.* Ediční středisko VUT, Brno, 1979. 64 s.

[167] J. Svatek. *Úvod do logiky.* VŠ strojní a elektrotechnická, Plzeň, 1991. 130 s.

[168] J. Svatek. *Základy logiky.* VŠ strojní a elektrotechnická, Plzeň, 1991. 130 s.

[169] V. Svoboda. *Základy neformální logiky.* Fortuna, Praha, 1995. In: *Základy společenských věd pro střední školy*, str. 117–165.

Text tvoří součást středoškolské učebnice "Základy společenských věd". Svobodova stať je rozvržena do čtyř kapitol, z nichž každá je uzavřena souborem úloh k samostatnému řešení. Připojen je seznam doporučené literatury. Text převážně sleduje standardní postup úvodu do logiky: klasifikace jazykových výrazů z pohledu logiky ve vazbě na jejich užívání v přirozeném jazyce a základní idea logické analýzy výroků; výklad základů logické sémantiky podle Alonzo Churche, pasáž o vágnosti a základy teorie definic; základní pojmy a metody teorie deduktivního usuzování včetně zmínky o induktivním usuzování. Zařazením kapitoly o základech teorie argumentace se práce odlišuje od běžných učebních textů stejného zaměření. Obsahuje množství dobrých a originálních příkladů. Výklad je veden snahou o stručné podání základů logického usuzování bez užití formalismů a formálních důkazových metod. *(Ko)*

[170] J. Szomolányi. *Základné logické kalkuly.* Universita Komenského, Bratislava, 1975.

Skripta pro filosofickou fakultu. Důkladně zpracovaný výklad výrokové logiky a predikátové logiky, včetně základních metalogických výsledků pro příslušné kalkuly (bezespornost, úplnost, kompaktnost, normální formy, Skolem-Löwenheimova věta). Je obsažen i výklad deduktivních axiomatických teorií a axiomatických logických systémů. V textu jsou vyváženě užity sémantické a syntaktické metody. Teorie důkazu pro uvedené kalkuly je budována na základě sémantických tabel. Výklad je veden snahou o striktně formální přístup (i pokud jde o sémantické metody). *(Ko)*

[171] J. Szomolányi. *Úvod do neklasických logík.* Universita Komenského, Bratislava, 1979. 185 s.

Skripta pro filosofickou fakultu. Kritériem 'neklasičnosti' je porušení principu dvojhodnotovosti nebo porušení principu extenzionality nebo zavedení jazyka s nekonečně dlouhými formulemi. V textu jsou poměrně důkladně vyloženy systémy modální logiky (axiomatické systémy a teorie modelů), logiky striktní a relevantní implikace, intuicionistická logika (axiomatické systémy, teorie modelů, tablová metoda), vícehodnotové logiky, časová logika, asertorická logika, epistemická logika, deontická logika a logika preference. Zařazena je i kapitola o vztahu mezi neklasickými logikami a klasicku logikou a o vztahu mezi logikami nestandardních implikací a vícehodnotovými logikami. Výklad je veden snahou o striktně formální přístup (i pokud jde o sémantické metody). *(Ko)*

[172] J. Šefránek. *Logika, jazyk a poznanie.* Epocha, Bratislava, 1969. 161 s.

[173] J. Šefránek. Úvod do logiky a metodológie vedy. Bratislava, 1970. 83 s.

[174] F. Šeracký. Teorie poznání a vědy. Praha, 1920. 209 s.

[175] F. Šimek. *Logika pro vzdělané učitelstvo a přátele věd.* Nakl. F. A. Urbánek, Praha, 1880.

Velmi podrobný výklad klasické aristotelské sylogistiky, včetně skládání dvou sylogismů za sebe. Eulerovy diagramy. Spousty příkladů z biologie a z matematiky. *(Be)*

[176] S. Šoka. *Stručný úvod do filosofie. Logika.* Církevné nakl., Bratislava, 1985. 140 s.

[177] P. Štěpánek. *Matematická logika.* MFF UK, Praha, 1982. Skriptum. 281 s.

[178] J. Štěpán a J. Hrubeš. *Logika. Terminologický a výkladový slovník.* Scholaforum, Ostrava, 1994. 115 s.

[179] J. Štěpán. *Algoritmy matematické logiky.* Universita Palackého, Olomouc, 1992.

[180] J. Štěpán. *Klasická logika.* Universita Palackého, Olomouc, 1992. 153 s.

[181] J. Štěpán. *Logika a logické systémy.* Votobia, Olomouc, 1992.

Přehledná učebnice logiky pro různé typy škol a studijních oborů. Poslouží i jako středoškolská učebnice. První část podává standardní výklad výrokové logiky, predikátové logiky (se zmínkou o tradiční logice), logiky tříd a binárních relací. Druhá část je cenná pro důraz na výklad systému přirozené dedukce a Gentzenovského systému. Zařazena je kapitola o axiomatických systémech v logice i v mimologických oborech. Jsou zmíněny i některé neklasické logiky (trojhodnotová, modální, intuicionistická). Text obsahuje množství zajímavých příkladů, ukázek důkazů v deduktivních systémech i klíč k vybraným cvičením. *(Ko)*

[182] J. Štěpán. *Formální logika.* FIN, Olomouc, 1995. 109 s.

Publikace seznamuje čtenáře se základy výrokové a predikátové logiky, teorií tříd, sylogistikou a kalkuly přirozené dedukce.

[183] A. Tarski. *Úvod do logiky a metodologie deduktivních věd.* Academia, Praha, 1966. 248 s.

Kniha vyšla poprvé roku 1936 ve Lvově a Varšavě pod názvem *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej.* V krátké době se dočkala četných rozšířených a modernizovaných vydání na celém světě: byla přeložena do němčiny, angličtiny, ruštiny, španělštiny, holandštiny, hebrejštiny a francouzštiny; jen v angličtině vyšla do r. 1964 ve třech vydáních. Světový úspěch Tarského práce není náhodný a není pouhým automatickým důsledkem autorovy proslulosti. Je dán především pedagogickými kvalitami a ovšem i vysokou úrovní této knihy. Slova autora z předmluvy k českému vydání: "Doporučil bych každému univerzitnímu studentovi, nezávisle na oboru, v němž se specializuje, aby absolvoval alespoň elementární kurs moderní logiky. Moje motivace není výlučně intelektuální. Hlavní problém, před nímž dnes stojí lidstvo, je normalizace a racionalizace vztahů mezi lidmi. Nemám iluze, že rozvoj logiky – nebo v tomto ohledu jakékoli jiné teoretické vědy – povede sám o sobě k uspokojivému řešení tohoto problému, ale věřím, že větší rozšíření znalosti logiky může k jeho řešení pozitivně přispět. Neboť na jedné straně tím, že logika zpřesňuje a sjednocuje významy pojmů ve své vlastní oblasti a že zdůrazňuje nutnost takového zpřesňování a sjednocování v každém jiném oboru, vede k možnosti lepšího porozumění mezi těmi, kdo mají vůli ho dosáhnout. A na druhé straně tím, že zdokonaluje a zjemňuje nástroje myšlení, činí lidi kritičtějšími a zmenšuje tak pravděpodobnost toho, že budou zavedeni všemi možnými pseudoúvahami, jimž jsou dnes neustále vystaveni v různých částech světa." *(Ji)*

[184] P. Tichý. *Logika pro studující PI.* Ústav pro dálkové studium učitelů, UK, Praha, 1964. 91 s.

[185] P. Tichý. *Logická stavba vědeckého jazyka.* FF UK, Praha, 1968. 231 s.

Formální analýza jazyka vědy, v níž se objevují zárodky pozdější autorovy *transparentní intenzionální logiky.*

[186] P. Tichý. *O čem mluvíme? Vybrané stati k logice a sémantice.* FILOSOFIA – nakl. FÚ AV ČR, Praha, 1996. 174 s.

Český překlad vybraných statí, které P. Tichý publikoval v exilu v předních zahraničních odborných časopisech. Kniha mapuje Tichého vrcholné tvůrčí období, tj. zhruba posledních dvacet let jeho života. Úvod zpracovaný J. Peregrinem shrnuje Tichého životní osudy a odborné působení, vymezuje klíčová témata jeho logicko-filosofického díla a přináší Tichého úplnou bibliografii. Překlady zahrnují například článek "O Popperových definicích verisimilitude", v němž Tichý ukázal, že do té doby široce přijímané Popperovy definice "blízkosti k pravdě" jsou logicky neudržitelné. Další statě uvádějí do originálního systému Transparentní intenzionální logiky ("Dva druhy intenzionální logiky", "Konstrukce"), ukazují jeho aplikace v logické analýze přirozeného jazyka a sémantice ("O čem mluvíme?", "De dicto a de re") a při řešení filosofických problémů logickými metodami ("Existence a Bůh", "Znovu o Sinn a Bedeutung"). *(Ko)*

[187] L. Tondl. *Problémy sémantiky.* Academia, Praha, 1966. 366 s.

O sémantice jako oboru, který se zabývá studiem významů jazykových výrazů a jakýchkoliv prostředků užitých k sdělování vůbec, nelze říci, jak se to obvykle zdůrazňuje, že je to "nově vzniklá disciplína". Úvahy, které se týkají této problematiky, lze nalézt v pracích logiků, matematiků, jazykovědců, filosofů, estetiků již počínaje spisy Aristotelovými. Jsou-li problémy sémantiky staré [tyto problémy se týkaly již některých antických paradoxů], je nový její význam a její úloha v soudobém vědeckém myšlení. Nový význam a nová úloha sémantiky vyvstala hlavně v souvislosti s pokroky kybernetiky, teorie komunikace, jakož i některých dalších oborů, které byly oplodněny těmito novými směry a proudy vědeckého myšlení. Pohled na problematiku sémantiky, který je uplatněn v této knize, opírá se o dva hlavní zdroje: jednak o principy moderního logicko-matematického myšlení, principy formalizace a konstrukce formalizovaných jazyků, jednak o některé principy moderního pojetí sdělovacích procesů, o tzv. komunikačně rozhodovací model. Přitom hlavní těžiště celé práce je spjato se sémantickými problémy empirických věd, tedy s otázkami vědecké metodologie. Proto také celou práci je možno pokládat za příspěvek k metodologii empirických věd. Jakákoliv vědecká aktivita předpokládá, že je užito určitých sdělovacích prostředků, které musí být interpretovány, t.j. přiřazovány k prvkům určitého universa. Proto také východiskem jednotlivých výzkumů, ať se již týkají základních sémantických pojmů [označovat, značit, zastupovat aj.], problémů logické sémantiky, smyslu a denotace, kritéria smyslu, vágnosti aj., je to, co autor nazývá "komunikačním modelem jazyka" a "komunikačním modelem vědy". Kniha navazuje hlavně na výsledky výzkumů v logické sémantice, zejména na práce Fregeho, Churche, Carnapa, Tarského a jiných, a podává proto také přehled a současně kritické hodnocení těchto výsledků. Hlavním cílem knihy je však vlastní řešení některých sémantických problémů jazyka empirických věd, zejména problematiky kritéria smyslu, redukce a konstituce, identifikace, synonymie, vágnosti. V souvislosti s touto problematikou je předložena nová koncepce empirismu, která se opírá o komunikační model vědy a navazuje na výsledky sémantiky. Sémantická problematika poskytuje určité východisko pro nové řešení některých tradičních metodologických problémů, například problematiky nominalismu a platonismu, analytických a syntetických vět apod. Těmto otázkám jsou věnovány závěrečné kapitoly knihy. *(p)*

[188] E. Tugenhat a U. Wolf. *Logicko-sémantická propedeutika.* Nakladatelství Petr Rezek, Praha, 1997. 238 s.

Z německého originálu *Logisch-semantische Propädeutik* přeložil Martin Pokorný. Knížka je míněna jako učebnice pro úvodní proseminář a hodí se též k výuce filozofie na středních školách. Začíná výkladem pojmu logiky, pojednává o pojmech existence, bytí, popření a tvrzení. Dále pojednává o pravdivosti a teoriích pravdivosti a konečně o modalitách možnosti a nutnosti. V závěru též o epistemických modalitách. *(Ji)*

[189] J. Tvrdý. *Logika.* Melantrich, Praha, 1937. 272 s.

[190] T. Varga. *Matematická logika pre začiatočníkov 1, 2.* Alfa, Bratislava, 1970. 193 s.

[191] J. Vild a J. Šedý. *Matematika 2. Algoritmy a logika.* VŠ strojní a textilní, Liberec, 1978. 103 s.

[192] S. N. Vinogradov a A. Kuzmin. *Logika.* Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951. 151 s.

[193] S. Vinogradov a A. Kuzmin. *Logika.* ŠPN, Bratislava, 1954. 163 s.

[194] M. Vlček. *Úvod do klasické (Aristotelské) logiky.* FIS VŠE, Praha, 1996. Skriptum. 114 s.

Je to "tradiční výklad" klasické dvouhodnotové logiky – výrokové a predikátové. Predikátová logika je však vykládána nejen nevhodnou metodou, s řadou překlepů, gramatických chyb, ale bohužel i závažných chyb věcných. V publikaci jsou jako příklady korektních úsudků uváděna dokonce logicky neplatná tvrzení. Jako učebnici nelze doporučit.

[195] P. Vopěnka. *Rozpravy s geometrií.* Panorama, Praha, 1989. 519 s.

Kniha Petra Vopěnky je jedinečným dílem, jehož cílem je osvětlit dějiny matematiky z hlediska jejích záměrů, zařadit její vývoj do filozofických proudů těch dob, které kniha svým rámcem vymezuje. Protože jedním z nejvlivnějších směrů při rozvoji matematiky byla matematika názoru, která též odpovídá evropskému rozkvětu matematiky, omezuje se autor na vývoj geometrie, a to geometrie klasické. Čtenář se dovídá, že starý geometrický svět objevený v antice nebyl bezesporný, že se zde střetávaly často protichůdné představy a názory. Tomu, kdo spojuje matematiku s jejím humanitním posláním, otvírá toto dílo ucelený pohled do dávné minulosti zrodu a vývoje evropské matematiky, na obtížné cesty jejího rozvoje, a spolu s tím mu nabízí možnost pochopit krásu idejí, jimiž antika geometrii obdařila. *(p)*

[196] P. Vopěnka. *Druhé rozpravy s geometrií.* Fokus-Práh, Praha, 1991. 232 s.

Pokračování předchozího textu. Dosud vyšly již čtvrté rozpravy.

[197] P. Vopěnka. *Podivuhodný květ českého baroka. (První přednášky o teorii množin).* Karolinum – nakl. Univerzity Karlovy, Praha, 1998. 304 s.

Autor se pokouší vykreslit obraz opravdu podivuhodného myšlenkového světa, který vznikal na pražské univerzitě v období duchovního rozmachu baroka a který významně ovlivnil matematiku devatenáctého a dvacátého století. Jde o první ze serie přednášek o teorii množin. Není to ovšem učebnice teorie množin, ale dílo, které zkoumá kořeny a širší duchovní pozadí vzniku teorie množin v podání Bernarda Bolzana.

[198] K. Vorovka. *Úvahy o názoru v matematice.* Česká akademie pro vědy, slovesnost a umění, Praha, 1917. 99 s.

[199] J. Wagnerová. *Seminární cvičení z logiky (volitelný seminář).* Universita Karlova, Praha, 1982. 108 s.

[200] O. Weinberger a O. Zich. *Logika. Učebnice pro právníky.* SPN, Praha, 1965. 270 s.

Jedna z nejlepších učebnic výrokové logiky a monadické logiky, tj. logiky tříd. Pojmy: definice, otázka a odpověď, argumentace. Logika normativních vět. (Návaznost na brněnskou právní školu normativní, kde se poprve objevuje pojem normativní věta a příslušná logika, později zvaná deontická.)

[201] O. Weinberger. *Problematika normativních vět v moderní logice (Lze označit normativní věty (imperativy) za pravdivé?).* Rozpravy ČSAV, Praha, 1958. 161 s.

[202] O. Weinberger. *Logika. Učebnice pro právníky.* SPN, Praha, 1959. 277 s.

První česká soustavná učebnice logiky určená právníkům.

[203] O. Weinberger. *Studie k logice normativních vět.* Rozpravy ČSAV, Praha, 1960. 67 s.

[204] O. Weinberger. *Alternativní teorie jednání.* FILOSOFIA – nakl. FÚ AV ČR, Praha, 1995. 278 s.

[205] A. N. Whitehead. *Matematika a dobro a jiné eseje.* Mladá fronta, edice Váhy, Praha, 1970. Přel. F. Marek a L. Hejdánek.

Whitehead náleží k nejpozoruhodnějším myslitelům první poloviny dvacátého století. Podobně jako Husserl, s nímž byl nejednou srovnáván, vyšel z matematiky, zejména z nejobecnějších partií algebry. Světového jména a trvalých zásluh si vydobyl třemi velkými svazky základního díla symbolické logiky, *Principia Mathematica*, jež vydal spolu s Bertrandem Russellem. *(p, Ji)*

[206] L. Wittgenstein. *Poznámky o základech matematiky.* Scientia & Philosophia 5, IZV UK, Praha, 1992.

[207] L. Wittgenstein. *Filozofická zkoumání.* Filozofický ústav AV ČR, Praha, 1993. Přel. J. Pechar.

[208] L. Wittgenstein. *Tractatus logico-philosophicus.* OYKOYMENH, Praha, 1993. Přel. J. Fiala. 229 s.

Paralelní český a německý text. Dnes už klasická filozoficko-logická publikace. *(Ji)*

[209] G. Zába. *Katechismus logiky.* U Hejdy a Tučka, Praha, 1920. Druhé opravené vydání.

[210] I. Zapletal. Logika a úvod do teorie množin. Praha, 1968.

[211] I. Zapletal. *Úvod do teorie pedagogických věd. Logika a metodologie.* UK, Praha, 1969. Skriptum. 73 s.

[212] I. Zapletal. Antologie příkladů z logiky. Praha, 1972. Skriptum. 257 s.

[213] I. Zapletal. *Elementy logiky.* SPN, Praha, 1980. 167 s.

[214] Z. Zastávka. *Formální metody klasifikace etnografických objektů.* Acta Universitatis Carolina. Philosophica et Historica, Praha, 1978. 132 s.

Na konkrétním materiálu zpracování dokumentace lidových staveb (uložen v bývalém ústavu pro etnografii a folkloristiku ČSAV) je realizován návrh nového klasifikačního systému. Nejprve jsou vyloženy základní pojmy a metody teorie klasifikace a popsán *klasifikační algoritmus.* *(Za)*

[215] Z. Zastávka. *Cvičení k chybným argumentacím.* Lidová univerzita Akademie J. A. Komenského, Praha, 1992. 45 s.

Cvičení a řešení ke všem chybným argumentacím, které jsou v přehledu (klasifikačním schematu) chybných argumentací v učební příručce *Miroslav Jauris a Zdeněk Zastávka: Neformální logika.* Řešení sedmdesáti sedmi cvičení jsou určena učitelům logiky na středních školách. *(Za)*

[216] Z. Zastávka. *Vše, co není zakázáno, se nesmí.* RADIX spol. s r. o., Jihlava, 1998. 196 s.

[217] O. Zich et al. *Moderní logika.* Orbis, edice MME, Praha, 1958. 240 s.

Jednotlivé kapitoly, kromě Otakara Zicha, napsali Karel Berka, Miroslav Jauris, Pavel Materna, Miroslav Mleziva a Ota Weinberger. Knížka vyšla v řadě Malá moderní encyklopedie. Je to naše první encyklopedická příručka logiky, která vznikla z prvních přednášek členů právě založené katedry logiky na filosoficko-historické fakultě University Karlovy. Jsou zde zastoupeny všechny teorie současné podoby formální logiky, pro kterou autoři navrhli termín moderní logika, který se u nás ujal a stále používá. Každá část má kontrolní cvičení. *(Za)*

[218] O. Zich et al. *Základy kybernetiky, programování a využití počítačů.* SPN, Praha, 1976. 197 s.

Publikace kolektivu logiků, matematiků a informatiků (T. Havránek, P. Jirků, Z. Kindler, M. Mleziva, Z. Zastávka, O. Zich), která uvádí do oblasti logiky, informatiky a výpočetní techniky. Právě poslední jmenovaná část je dobově podmíněna stavem výpočetní techniky první poloviny sedmdesátých let.

[219] O. Zich et al. *Základy matematických metod pro automatizovanou analýzu dat v experimentálním výzkumu.* FF UK, Praha, 1979. Skriptum. Část I. Petr Jirků: Úvod do teorie množin. – Miroslav Mleziva: Formální logika. 51 s.

Obě části skript jsou úvody do elementárních pojmů teorie množin a formální výrokové logiky. Účelová publikace k postgraduálnímu kursu.

[220] O. Zich a A. Kolman. *Zajímavá logika.* Mladá fronta, Praha, 1965. 158 s.

Kniha má podtitul Sbírka řešených příkladů s úvodem do výrokového a třídového kalkulu od Otakara Zicha. Zichův text je zajímavý tím, že třídový kalkul je vyložen podle W. S. Jevonse (Jevonsův kalkul, který je rozšířen a upraven). Příklady jsou vybrány a řešeny s použitím uvedených dvou logických teorií. Po zadání každého příkladu následuje jeho řešení s podrobným výkladem. Kromě Zicha a Kolmana některá zadání nebo jejich řešení napsal Pavel Materna. Příklady nejsou teoretické – vždy jde o konkrétní problémy z různých oblastí, oborů či životních situací. Některé úlohy chtějí pobavit, jiné mají vážný praktický i teoretický význam. Autorům šlo o to, "naučit čtenáře na nepříliš složitých příkladech elementární technice logického myšlení". *(Za)*

[221] O. Zich, I. Málek a L. Tondl. *K metodologii experimentálních věd.* Nakl. ČSAV, Praha, 1959. 342 s.

Kniha má tři části: Otakar Zich: O některých logických a metodologických stránkách experimentu, Ivan Málek: Historická metoda a experiment a Ladislav Tondl: Kausalní analysa a kausalní explikace. Otakar Zich ve svém textu používá termíny klasifikační logika a systémová logika pro charakteristiku specifických logických přístupů k experimentu. Souvislý výklad věnuje induktivní logice. *(Za)*

[222] O. Zich. *Úvod do filosofie matematiky.* Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1947. 172 s.

Tato nevelká knížka svým rozsahem je zhuštěným výkladem soudobé podoby matematiky a logiky. (Přesněji řečeno: výkladem problémů, kterými se matematika s logikou zabývají.) Je historickým dokladem toho, jak se u nás formovala moderní logika v podobě matematické logiky. Nejrozsáhlejší jsou kapitoly Předmět matematiky a Logika a matematika. V matematickém textu se autor zabývá problémem konstruovatelnosti a bezespornosti. Vztah mezi logikou považuje za podstatný nejen pro filozofii matematiky, ale pro celou filozofii vědy. Podrobněji se věnuje výrokové logice, predikátové logice (funkčnímu počtu), intuicionistické a vícehodnotové logice. Samostatný výklad je věnován axiomu nekonečna, teorii typů, axiomu výběru, teorii množin a axiomatickým soustavám (elementární matematiky, Hilbertovy geometrie). *(Za)*

[223] O. Zich. *Lidová přísloví z logického hlediska.* Nakl. ČSAV, Praha, 1956. 174 s.

V logické literatuře jde o knížku vyjímečnou a originální. Autor si vybral Čelakovského Mudrosloví národu slovanského v příslovích, aby poukázal “na to, že lidové myšlení v hojné míře používá logických forem, nebo alespoň jejich zárodečných tvarů, které byly odkrývány ve vědeckém myšlení doby renesanční a pozdější”. Logická analýza jednotlivých přísloví a pořekadel je prováděna převážně v intencích tradiční logiky, často však s podnětnými úvahami o potřebě nových logických teorií (např. imperativu, norem, “časového sledu”). *(Za)*

[224] O. Zich. *Význam logiky pro práci vysokoškolského učitele.* SPN, Praha, 1959. 98 s.

Jde o sborník tří samostatných autorových prací: *Úkoly formální logiky ve vyučovacím procesu vysoké školy, Souvislost formální logiky s výchovou k vědeckému výzkumu, O subjektivních překážkách logického myšlení.* Je to jeden ze svazků, které připravila katedra pedagogiky filosoficko-historické fakulty University Karlovy ve svém projektu vysokoškolské pedagogiky. Výklad je proveden na historických a tehdy aktuálních příkladech a ukázkách. Ve druhé práci je původní výklad *teorie klasifikace.* Třetí práce je věnována problematice, kterou se v současné době zabývá *neformální logika* (omyly při zobecňování a analogie). Text na mnoha místech může být stále inspirativní nejen pro učitele na vysokých školách, ale i na školách středních a odborných. *(Za)*

[225] O. Zich. *Logika pro praxi.* Práce, Praha, 1968. 186 s.

Kniha je napsána jako příručka pro použití (aplikaci) logiky v různých oborech, která sice “nechce podat návod k řešení všech situací, ale může ukázat typy postupů, které mohou pomoci situaci řešit”. Podává přehled všech prostředků soudobé moderní logiky s cílem “působit na určitou kulturu myšlení”. Obsahuje výrokovou logiku a predikátovou logiku. Ve výrokové logice je podrobný výklad disjunktivní i konjunktivní normální formy s mnoha konkrétními aplikacemi. Po úvodním výkladu predikátové logiky následuje logika tříd, kde je hodně místa věnováno rozkladu univerzální třídy (univerza) a aritmetickým aplikacím algebry tříd. Výklad pokračuje logikou relací. Oba výklady jsou založeny na rozlišení pojmu jednomístného predikátu a třídy, dvojmístného predikátu a relace. Výchozí je pak výroková logika: “Hlubší studium ukazuje, že algebra, která se dá zavést v logice výroků, má své analogie v logice tříd

… a podobně i analogie v logice relací. Tyto algebry jsou jistými interpretacemi algebry, a mají tedy společný kořen.” *(Za)*

[226] O. Zich. *Logika.* Úřad pro patenty a vynálezy, Praha, 1971. 132 s.

Tento text byl připraven pro speciální kurz logiky pro Úřad pro patenty a vynálezy a vychází z autorovy knihy Logika pro praxi, i když se nejedná o přepis této knihy. Výběr příkladů a výklad aplikačních možností logiky je upraven pro účastníky kurzu, některé části jsou napsány zcela nově. Mezi ně patří výklad vícehodnotové logiky a zejména pak kapitola Stručně o algoritmech s výkladem základních pojmů teorie algoritmů. (“Hlubší úvahy ukazují, že teorie algoritmů tvoří s moderní logikou nedílný celek a že dokonce vznikla i z podnětů soudobé logiky.”) *(Za)*

[227] P. Zlatoš. *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou. (Úvahy o množinách, nekonečne, paradoxoch a Gödelových vetách.).* IRIS, Bratislava, 1995.

[228] J. Zlatuška. *Lambda-kalkul.* Masarykova univerzita, Brno, 1993.

Jedná se o formální matematické modely a kalkul funkcí, které jsou chápány jako výpočtové procesy. Autor podává základní pojmy a techniky jak v čistém lambda kalkulu, tak v kalkulu s typy. Výklad je srozumitelný i bez použití aparátu teorie kategorií, což je v tomto kontextu časté. *(Ji)*

Zkratky autorů hesel:

Be	Kamila Bendová
Ja	Miroslav Jauris
Ji	Petr Jirků
Ko	Petr Kolář
Za	Zdeněk Zastávka
p	s použitím přebalu knihy nebo předmluvy

---

file: knihy.tex

Kapitola 4

Recenze

4.1 Petr Vopěnka: Podivuhodný květ českého baroka *Petr Jirků*

V roce 1998, kdy vyšla publikace profesora Vopěnky *Podivuhodný květ českého baroka* s podtitulem *První přednášky z teorie množin*, tomu bylo právě stopadesát let, kdy jeden z tvůrců teorie množin, vynikající pražský filozof a matematik Bernard Bolzano, zemřel.

Autor recenzované publikace, profesor Petr Vopěnka, je českému čtenáři dobře znám nejen jako vynikající matematik, ale v poslední době především jako autor úspěšných *Rozprav s geometrií*, díla, ve kterém šlo o porozumění filozofickému a širšímu duchovnímu prostředí, v němž se rozvíjela matematika geometrického názoru od antických počátků po středověk a počátek nového věku.

Nyní předkládá čtenáři další vynikající dílo, ve kterém se pokouší vykreslit obraz opravdu podivuhodného myšlenkového světa, který vznikal na pražské univerzitě v období duchovního rozmachu baroka a který významně ovlivnil matematiku devatenáctého a dvacátého století. Jde o *První přednášky o teorii množin*, které na *Rozpravy s geometrií* volně navazují.

Autor na množinový svět nahlíží pohledem analogickým *Rozpravám.*

Nahlížení do světa množin a zacházení s nimi nám umožňuje vytvářet si o nich názor podobně jako v případě názoru, týkajícího se světa geometrického. Samozřejmě v tomto kontextu je významné, že se nejedná jen o množiny konečné, ale že jde především o množiny nekonečné, které nemůžeme ovšem nikdy vidět svýma lidskýma očima, můžeme si je však představovat podobně jako si představujeme objekty světa geometrického.

Je cenné, že autor začíná svůj obsáhlý výklad kapitolou, týkající se "... jisté naladěnosti určité vrstvy evropského (a zvláště pražského) obyvatelstva, jež předcházela vzniku této teorie [rozuměj: teorii množin] a dále pak počátečnímu, tj. Bolzanovskému, období rozvoje teorie množin." Čtenáři s převážně matematickým vzděláním se otevírá pohled na vlastní disciplínu z úhlu, který mu není běžný. Filozof zase nahlédne, že nekonečno, jímž se matematika stává vskutku zajímavou, je velmi bohatě strukturované, a jak nás Petr Vopěnka přesvědčuje, toto bohatství struktury ani zdaleka není jen výsledkem volné fantazie matematiků, ale má hluboké kořeny právě v té naladěnosti a snad i v *geniu loci.* Je ale možné, dokonce snad pravděpodobné, že historik namítne, že právě ona "naladěnost", jak ji profesor Vopěnka čtenáři předkládá, je sama již interpretací, ale v tom právě je třeba spatřovat autorův přínos.

Jistě se najdou diskutabilní pasáže. Recenzent se např. domnívá, že začátek třetí kapitoly nazvané *Sensorium Dei*, v němž se poukazuje na to, jak "úchvatná krása katolické barokní Prahy ..." či "kouzelné prostředí zbožného českého venkova" působily na Bernarda Bolzana, vyznívá až příliš idylicky, uvědomíme-li si, že s českým venkovem se Bolzano důvěrně poznává poté, co byl vyhnán ze staroslavné pražské univerzity a *de facto* i z Prahy. Celkový obraz zrodu či spíše objevení "Nového světa matematiky" je ale ve Vopěnkově podání úchvatný.

Rozčlenění publikace na tři části: Živnou půdu, Problém aktuálního nekonečna a Sensorium Dei, je promyšlené. Čtenář se spíše matematickým zaměřením možná při prvním čtení bude netrpělivý, "*kdy už konečně přijde řeč na ty množiny!*", možná si i v duchu řekne, zda autor v první kapitole nezatěžuje výklad oné výše zmíněné naladěnosti popisováním různých, někdy marginálních myšlenkových proudů a odboček (a to i podle vyjádření samotného autora). Teprve poté, co se ale dopracuje k samotnému finále knihy, vyvstane mu celý obraz i zarámování tématu a čtenář se rád bude vracet i k detailům první kapitoly.

Kniha je psána volnou, esejistickou formou, stejně jako tomu bylo u *Rozprav*, což v autorově vytříbeném literálním stylu nepochybně pozitivně přispívá ke čtivosti díla. Rozhodně to ale neubírá nic na její hodnotě vědecké a odborné. Na druhé straně, čtenáři, který se chce věnovat podrobnějšímu studiu použitých pramenů a chce sám posoudit odkazovaná místa a citace, jichž je z pochopitelných důvodů v publikaci mnoho, by velmi pomohlo, kdyby alespoň ty nejdůležitější byly uváděny úplně, tedy i se stránkami. V případech, kdy se odkazuje na obsáhlejší publikace, je často dost pracné odkazovaná místa nalézt. Vzhledem k rozsahu díla by rovněž bylo užitečné, kdyby publikace byla vybavena obsahem. Jde o dílo, které sice mnohý čtenář bude číst "jedním dechem", ale později, při druhém či dalším čtení, se bude chtít k mnohým odstavcům a pasážím vracet. Na to, aby stálo za to obsah sestavit, je kniha dostatečně členěná.

Recenzent si též není zcela jist tím, zda autor vždy plně docenil možný rozsah čtenářské obce, která bude patrně širší než v matematice vysokoškolsky vzdělaní čtenáři. Pro čtenáře–nematematiky – a takových jistě bude dost – by bylo vhodné doporučit některou (či spíše některé) ze standardních současných učebnic matematické analýzy pro případné doplnění znalostí, které jsou v některých pasážích knihy implicitně předpokládány, což se týká zejména odstavců či kapitol počínaje Bolzanovým řešením problému aktuálně nekonečného množství (od str. 208). Například pro některé studenty filozofie, případně i zkušené filozofy, by to mohla být dobrá pomůcka.

Je to práce, kterou česká matematická a filozofická, ale i širší odborná veřejnost, přijme s velkým zájmem a dychtivě bude očekávat autorem avizované *Druhé přednášky o teorii množin*, případně i další.

Petr Jirků
Katedra logiky
Filozofická fakulta Univerzity Karlovy
Praha
E-mail: Petr.Jirku@ff.cuni.cz

MISCELLANEA LOGICA
TOM II

Doc. PhDr. Petr Jirků, CSc., RNDr. Vítězslav Švejdar, CSc.
Editoři

Vydala Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum
Ovocný trh 3, 116 36 Praha 1
Praha 1999
Prorektor-editor prof. MUDr. Pavel Klener, DrSc.
Obálku navrhl Jiří Staněk
Sazbu systémem LaTeX provedli Petr Jirků a Vítězslav Švejdar
Publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou
Vytiskla tiskárna Nakladatelství Karolinum
Vydání první
ISBN 80–7184–790–9