MISCELLANEA LOGICA

TOM I

Petr Jirků a Vítězslav Švejdar

Editoři

KAROLINUM

nakladatelství Univerzity Karlovy

Praha 1998

http://logika.ff.cuni.cz/papers/misclogI.pdf

Recenzenti: RNDr. Kamila Bendová, CSc.
RNDr. Petr Kolář, CSc.

ISBN 80 – 7184 – 578 – 7

Obsah

Kapitola 1

O výuce logiky

1.1 O nezbytnosti logiky
Petr Jirků

Trivium, což je nižší ze sedmi stupňů svobodných umění, které tvořilo základ výuky na každé středověké univerzitě, se skládalo z logiky, gramatiky a rétoriky. V té době logika znamenala klasickou logiku, tj. aristotelskou logiku, takže např. každý univerzitní student musel znát a musel umět řešit sylogismy. Později vznikla představa, že se studenti naučí logiku na gymnáziích: dost dlouho na gymnáziích logika jako vyučovaný předmět existovala, někdy se studenti učili logicky myslet (usuzovat) při studiu latiny a hlavně při studiu matematiky popř. dalších předmětů.

Aktuálně se na většině gymnázií a vysokých škol nevyučuje ani logika, ani latina a jen málokde se učí matematika jako vědní disciplína, která svá tvrzení dokazuje ze základních předpokladů, tj. z axiomů.

To má za následek, že v současné době často vycházejí jak ze středních škol tak i z univerzit absolventi, kteří nejen, že nevyřeší nejjednodušší (aristotelský) sylogismus, ale mnohdy si ani nekladou otázku po správnosti či problematičnosti používaných myšlenkových postupů.

Domníváme se, že v této situaci a ve snaze podpořit kvalitní výuku logiky na většině vysokých škol (a tím následně podpořit rozvoj logického myšlení už i na školách středních) je třeba provést analýzu problémů soudobé logiky a jejího vyučování. Lze sice namítnout, že realita je mnohem složitější, než aby mohla být pochopena v soustavě logických pojmů, ale přece:

- snažíme se rozšiřovat a hlavně strukturovat naše vědecké poznání a porozumět tomu, jak ho užívat pro racionální rozhodování, v němž logické usuzování hraje významnou a snad dokonce rozhodující roli;
- pracujeme s počítači - s nimi můžeme komunikovat často jen pomocí přesně definovaných pojmů a vět, což vlastně znamená pomocí logických formulí;
- snažíme se komunikovat nejen s počítači, ale především mezi sebou, diskutujeme, čteme a píšeme (odborné) texty;
- vytváříme právní systém, normy, statuty, nařízení, předpisy, ...

To vše je bez solidního logického zázemí, tj. bez zřetelného upřesnění logického vyjadřování a bez logického myšlení nemyslitelné.[1]

Od středověkých dob se ovšem výuka nápadně změnila. Stejně tak je třeba zohlednit, koho právě logiku učíme, jaké jsou jeho předběžné znalosti, jak a k čemu ji bude využívat. Proto bychom chtěli též vyjasnit, co patří do základního *curricula vitae* vysokoškolského absolventa a jakými směry je žádoucí tento základ rozšiřovat a prohlubovat. Jde mj. o zmapování logických dovedností vysokoškoláků (zjistit např. schopnosti objevit vady v konstrukci pojmů, schopnosti nalézt chybu v definici či dedukci, rozpoznat vadné argumentace apod.).

Jsme přesvědčení, že trvalé úsilí o kultivaci myšlení je nezbytným předpokladem úspěšného rozvoje svobodné společnosti. Jde nejen o to, myslet si a říkat "co chci", ale především rozumět tomu, co se děje při usuzování, když se změní výchozí předpoklady, a rozeznat korektní metody usuzování od těch, které jsou zatíženy rizikem a snažit se toto riziko odhadovat. Jde o dynamiku myšlení. V širším kontextu se vlastně jedná o hledání mezí racionality.

To byl důvod, proč jsme si položili nesnadno zodpověditelnou otázku co by měl každý absolvent vysoké školy v humanitních (rozuměj nematematických oborech) z logiky umět a o logice znát. Tak vznikl projekt

[1] Lze o tom denně přinášet nejrozmanitější svědectví v podobě logicky sporných zákonů a předpisů, neschopnosti zřetelně formulovat myšlenky a ideje.

HESP 34/96 Logika - *Curriculum vitae vysokoškoláka*, který je zabezpečován grantovou podporou *Open Society Fund* a jehož dílčím výsledkem je tento sborník, který byl mj. podkladem pro jednání semináře vysokoškolských učitelů *Organon '98*.

1.2 Výuka elementární logiky

(Sylogistika, booleovská logika nebo něco jiného?)

Miroslav Jauris

Autor vyjadřuje kritické výhrady k modelu výuky, který - pokud jde o dedukci - kromě výrokové logiky nepřináší nic než aristotelskou sylogistiku. Na druhé straně shledává velmi obtížným úplný výklad o kvantifikátorech a hledá řešení, které by obsáhlo vše, co lze řešit sylogistikou nebo booleovskou logikou a přitom vedlo k dovednostem a návykům, které známe z tak zvané přirozené dedukce. Práce byla napsána pro potřeby grantu Logika (*Curriculum vitae* vysokoškoláka), jehož úkolem je zodpovědět otázku, co má z logiky vědět student vysoké školy. Tento úkol nechápe autor tak, že má být dána svoboda představivosti a předestřena utopie ideálního stavu. Pro autora je otázka, co by měl student vysoké školy z logiky vědět a umět výlučně otázkou, co účelného (věcně i didakticky) dokážeme studentovi reálně nabídnout.

(A) Výuka sylogistiky a hledání alternativy

Gymnaziální vyučování logiky mělo na konci devatenáctého století a v době meziválečné své paradigma. Všechny gymnaziální učebnice vykládaly *tradiční logiku.* Kontinentální verze obsahovala táž témata: pojem, soud, úsudek (deduktivní a induktivní), metodologie a heuristika (mj. s kapitolou o definici a s kapitolami o metodě věd matematických a metodě věd empirických). Nejen rozvrh témat, i způsob výkladu byl v hlavních rysech zcela shodný. Britská verze hovořila spíše o jménech a větách než pojmech a soudech, opomíjela tzv. základní zákony myšlení, totiž zákon totožnosti, zákon sporu, zákon vyloučeného třetího a zákon dostatečného důvodu, a věnovala i více pozornosti argumentaci a argumentačním chybám. Naše rozprava se však týká i britské verze tradiční logiky.

Tradiční logika byla rostoucí měrou pociťována jako nepostačující. Již od třicátých let lze pozorovat, pokud jde o obor logiky, známky *krize školského paradigmatu.* Je nesnadné říci, co k ní přispělo více: sílící vědomí, že tradiční logika má velmi málo co říci moderní vědě, sílící povědomí o výkonnějších verzích logiky, booleovsko-jevonsovské a později i matematické logice, či sílíci povědomí o závažných nejasnostech a systémových nedostatcích ve výkladu tradiční logiky samé. Gymnaziální výuka tradiční logiky, ať povinná či volitelná, se většinou vytratila, a výuka symbolické logiky ji nenahradila, a ostatně ji ani nahradit nemohla. Výuka logiky symbolické naráží na gymnáziích i na vysokých školách na těžko překonatelnou didaktickou bariéru, a tou je jazyk predikátové logiky a kalkul s kvantifikátory. Pokusy naučit studenty *úplnému* jazyku s kvantifikátory, byť šlo jen o jazyk prvního řádu, končí zdarem u studentů, kteří jsou dobrými matematiky, ale vždy existuje dosti studentů, kteří vůbec nedokáží do tohoto jazyka proniknout. Zatímco výrokovou logiku lze přirovnat, pokud jde o obtížnost, k dosti nízkému stupni, na nějž dokáží vystoupit i studenti nižších gymnaziálních tříd, predikátová logika představuje tak vysoký stupeň, že na něj většina studentů gymnazií a vysokých škol vystoupit nedokáže. Proto i někteří skvělí vykladači logiky píší učebnice, a to i vysokoškolské, kde se o kvantifikátorech vůbec nemluví a kde se veškerý výklad pravidel správné dedukce omezuje na klasickou výrokovou logiku a aristotelský sylogismus. Zejména novější americké učebnice nasvědčují tomu, že se formuje jakýsi *nový model*, který má zaujmout místo někdejší logiky tradiční a ukončit tak krizi školského paradigmatu. Je zcela zbaven psychologismu, je psán v duchu "obratu k lingvistice", modernizuje kapitoly o induktivním usuzování, věnuje velkou pozornost argumentaci, ale pokud jde o dedukci, v podstatě se opět omezuje na výrokovou logiku a sylogistiku. *Ani tento nový model nenabízí způsob, jak ve výkladu dedukce proplout mezi Skyllou triviálnosti sylogistiky a Charybdou obtížnosti predikátové logiky.* Ukážeme svůj pokus o třetí řešení: polointuitivní přirozenou dedukci.

Ve svém výkladu polointuitivní přirozené dedukce předpokládáme, že student má základní znalosti výrokové logiky. Že umí symbolizovat zápisy premis a závěru a potom je formalizovat (provést abstrakci od obsahu tím, že atomární tvrzení nahradí výrokovými symboly "p", "q", …). Výsledkem symbolizace a formalizace premis a závěru je *sekvent* výrokové logiky, například

$$\begin{array}{lcr} (p \to r) & & \\ (q \to r) & \text{čili:} & (p \to r), (q \to r) \therefore ((p \vee q) \to r) \\ \therefore ((p \vee q) \to r). & & \end{array}$$

Sekvent nazýváme *pravidlem správného usuzování*, když se nemůže stát, budeme-li podle něj usuzovat, aby premisy byly pravdivé a závěr nepravdivý.

Student, předpokládáme, ví, že v každém souvislém myšlenkovém procesu máme na mysli nějaká *individua*, objekty (lidi, věci, čísla, výrazy, události), na které omezujeme svou pozornost. Předpokládáme, že student ví, co jsou kvantifikátory, a umí ve větě přirozeného jazyka rozpoznat a symbolicky zapsat *jeden, počáteční výskyt kvantifikátoru,* ví, že proměnná v kvantifikátoru a jeho dosahu může být přejmenována, a umí použít De Morganova pravidla pro kvantifikátory.

(B) Protipříklad

Abychom dokázali, že z daných premis nevyplývá daný závěr, stačí (a) najít sekvent, podle kterého se usuzuje a (b) ukázat *protipříklad vzhledem k tomuto sekventu*, to jest příklad usuzování podle tohoto sekventu, který má pravdivé premisy a nepravdivý závěr. (c) Podmínkou však je, aby nebylo možno najít jiný sekvent, podle kterého se usuzuje a který je pravidlem správného usuzování.

Příklad B/1. Pan X říká: "Každý, kdo se bojí vyšetřování, odstupuje ze své funkce. N. odstupuje ze své funkce. To znamená, že se bojí vyšetřování."

(a) Pak X vyjadřuje úsudek, který se děje podle sekventu

(*) vše, co má vlastnost P, má vlastnost Q,
a má vlastnost Q,
$\therefore$ a má vlastnost P.

(b) Úsudek mající tuto formu vede v některých případech od pravdivých premis k nepravdivému závěru. Například:

všichni vlci jsou šelmy	pravda,
moje kočka je šelma	pravda,
$\therefore$ moje kočka je vlk	nepravda.

(c) Můžeme tedy říci panu X: "Pane, usuzujete chybně. Usuzujeme stejně jako člověk, která říká: ' Každý vlk je šelma, moje kočka je šelma, to znamená, že moje kočka je vlk '". Nyní je na panu X-ovi, aby ukázal, že jeho úsudek má formu nějakého pravidla správného usuzování. Ale to se najít nedá.

V bodě (b) vidíme *slovní protipříklad vzhledem k sekventu* (*). Úlohu protipříkladu vzhledem k danému sekventu může hrát i *diagram Vennův, diagram Eulerův* nebo třeba takovýto diagram tohoto druhu:

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ P & P & & & \\ Q & Q & Q & Q & \\ & & & a & \end{array}$$

Tento diagram ukazuje situaci, kdy premisy sekventu (*) platí a závěr ne, a usvědčuje tedy tento sekvent, že není pravidlem správného usuzování. Počet koleček (individuí) jsme si zvolili náhodně; není například důležité, že zde právě dvě individua mají vlastnost P, ale že všechna individua, která mají vlastnost P, mají vlastnost Q, a individuum a vlastnost Q má, kdežto vlastnost P nemá.

> Každý obrázek, znazorňující situaci, kdy premisy sekventu platí a závěr ne, dokazuje, že tento sekvent není pravidlo správného usuzování.

Příklad B/2.

Premisy a závěr:	Někteří jeho příbuzní žijí v USA, někteří jeho příbuzní ho podporují $\therefore$ někteří jeho příbuzní žijí v USA a podporují ho.
Odpovídající sekvent:	něco, co má vlastnost P, má vlastnost Q, něco, co má vlastnost P, má vlastnost R $\therefore$ něco, co má vlastnost P, má vlastnosti Q i R.
Protipříklad vzhledem k tomuto sekventu:	některá přirozená čísla jsou sudá, některá přirozená čísla jsou lichá $\therefore$ některá přirozená čísla jsou sudá i lichá.

Jako protipříklad by mohl sloužit kromě Vennova a Eulerova diagramu i třeba tento obrázek.

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ P & P & & Q & Q \end{array}$$

(C) Odvozování

Místo aby si student osvojil znalosti o aristotelském výroku a sylogistice, může si osvojit dovednost *diskuse* a dovednost *polointuitivního odvozování.*

Příklad C/1. Začínající kriminalista N. a jeho představený K., se zabývají krádeží drog v nemocnici. Doslechli jsme se toto.
I : N. ani K. nepodezřívají nikoho, kdo nepracuje na chirurgii.
II : K. podezřívá každého kdo pracuje na chirurgii,
III : N. podezřívá sanitáře, který je ze všech sanitářů v nemocničním komplexu nejmladší.
Podezřívají nejmladšího sanitáře oba kriminalisté? Shoduje se v tomto ohledu zkušenejší kriminalista K s méně zkušeným kolegou? Budeme odvozovat z premis, abychom to zjistili.

Podle premisy III:
$^{(1)}$ N. podezřívá nejmladšího sanitáře.
Podle premisy I:
$^{(2)}$ N. ani K. nepodezřívají nikoho, kdo nepracuje na chirurgii.
Z $^{(1)}$ a $^{(2)}$ usuzujeme, že
$^{(3)}$ nejmladší sanitář pracuje na chirurgii.
Premisa II říká:
$^{(4)}$ K. podezřívá každého, kdo pracuje na chirurgii.
z $^{(3)}$ a $^{(4)}$ usuzujeme:
$^{(5)}$ K. podezřívá nejmladšího sanitáře.
Z $^{(1)}$ a $^{(5)}$ usuzujeme:
$^{(6)}$ N. i K. podezřívají nejmladšího sanitáře.

To, co je psáno malým písmem je součást komentáře, který k odvození nepočítáme. Když si to odmyslíme, odvození vypadá jako sloupec tvrzení, tak zvaných *dílčích výsledků odvozování*. Dílčím výsledkem odvozování je jednak každá premisa, jednak každé tvrzení získané usuzováním z nějakých předcházejících dílčích výsledků.

V našem odvozování jsme se řídili například svým tušením, odhadem, intuicí že z $^{(1)}$ a $^{(2)}$ vyplývá $^{(3)}$. Obdobně jsme usuzovali řízeni svým tušením, intuicí, z $^{(3)}$ a $^{(4)}$ na $^{(5)}$, a také z $^{(1)}$ a $^{(5)}$ na $^{(6)}$. Takto budeme i v dalších příkladech používat svou logickou intuici, svou vrozenou schopnost usuzování.

V logice je účelné poznamenat si před každý dílčí výsledek odvozování i premisy, které nám posloužily k jeho odvození; mezi tento výpis použitých premis a dílčí výsledek odvozování píšeme *oddělující znak* "$\therefore$". Pro stručnost před tímto oddělujícím znakem neuvádíme premisy celé, nýbrž jen jejich zkratky I, II, $\ldots$. V našem případě bude mít odvození tuto podobu.

Podle premisy III:
$III \therefore$ $^{(1)}$ N. podezřívá nejmladšího sanitáře.
Podle premisy I:
$I \therefore$ $^{(2)}$ N. ani K. nepodezřívají nikoho, kdo nepracuje na chirurgii.
Z $^{(1)}$ a $^{(2)}$ usuzujeme, že
$I, III \therefore$ $^{(3)}$ nejmladší sanitář pracuje na chirurgii.
Premisa II říká:
$II \therefore$ $^{(4)}$ K. podezřívá každého, kdo pracuje na chirurgii.
z $^{(3)}$ a $^{(4)}$ usuzujeme:
$I, II, III \therefore$ $^{(5)}$ K. podezřívá nejmladšího sanitáře.
Z $^{(1)}$ a $^{(5)}$ usuzujeme:
$I, II, III \therefore$ $^{(6)}$N. i K. podezřívají nejmladšího sanitáře.

Když uvádíme do odvození nějakou premisu, napíšeme tedy premisu (nebo lépe její zkratku I, II apod.), za to oddělující znak "$\therefore$" a za něj opět tuto premisu. Za tímto znakem hraje úlohu dílčího výsledku odvozování, před tímto znakem je poznámkou o premisách dosud použitých k odůvodnění toho, co je za tímto znakem. - Když napíšeme do nějakého, řekněme $n-$tého řádku dílčí výsledek, který jsme dostali z dílčích výsledků (jednoho nebo více) $^{(i)}$, $^{(j)}$, .., $^{(k)}$, musíme v $n-$tém řádku před "$\therefore$" napsat každou premisu (nebo zkratku za ni), kterou najdeme před "$\therefore$" v některém z řádků i, j, .., k; každou stačí napsat jen jednou.

Odvození je záznam systematického uvažování, při kterém vycházíme z daných premis (často si musíme sami z velkého množství premis ty vhodné vybrat) a získáváme z premis a dalších dosud odvozených tvrzení nová odvozená tvrzení usuzováním. Obvykle při tom směřujeme k nějakému předem danému závěru. Odvození pak končí, když k němu skutečně dospějeme. Pokud jsou všechny úsudky v daném odvození správné, pak závěr odvození vyplývá z premis. Odvození je tedy způsob, jak se ujistit, že z premis *vyplývá* závěr; to jest, že závěr říká jen to, co už je řečeno v premisách. Mnozí lidé se snaží vyřešit všechny otázky typu "vyplývá nebo nevyplývá" jednorázovým vytušením, uhodnutím na základě dojmu. To je oprávněné v případě velmi jednoduchých logických problémů, ale složitější logický problém vyžaduje odvození, rozložení úvahy na řadu jednoduchých, dobře kontrolovatelných kroků.

Logika vypracovává soustavy dokonale přesných pravidel odvozování, čili *kalkuly*; důkazy, které vypracovali logikové, garantují, že jsou spolehlivé a postačující. Když při odvození připojujeme jednotlivé řádky jen na základě pravidel nějakého kalkulu, jde o *formální odvození, odvození v daném kalkulu.*

Když připojujeme řádky jen na základě svého odhadu, tušení, intuice, že to je správný krok, jde o *intuitivní odvození.* A konečně, když připojujeme nové řádky zčásti na základě znalosti pravidel logického kalkulu a zčásti na základě svého tušení o správnosti takového kroku, jde o *polointuitivní odvození.* Naše odvození budou polointuitivní.

Jako příklady logikou garantovaných pravidel lze uvést tato čtyři.

R0. *Kdykoli smíš napsat řádek, ve kterém je nějaké tvrzení (nebo zkratka za ně), za ním "$\therefore$" a za tím opět ono tvrzení, tentokrát nezkrácené.*

R1. *Jestliže jsi při odvozování získal řádek tvaru*

$A_1, .., A_n \therefore B$,

a v premisách $A_1, .., A_n$ *se nevyskytuje* x*, smíš připojit řádek*

$A_1, .., A_n \therefore \forall x B$.

(Co platí o objektu označeném "x", na který přepoklady nekladou žádná omezení, platí o každém x. Na místě x může být a, b apod.)

R2. *Jestliže jsi při odvozování získal řádek*

$A_1, .., A_{n-1}, A_n \therefore B$,

smíš připojit řádek

$A_1, .., A_{n-1} \therefore (A_n \rightarrow B)$.

R3. *Jestliže jsi při odvozování získal řádek*

$A_1, .., A_n, \sim B \therefore (C \wedge \sim C)$,

smíš připojit řádek

$A_1, .., A_n \therefore B$.

(Když je nemožné (tj. dává spor), aby A_1, .., A_n platilo a B ne, pak nutně, platí-li A_1, .., A_n, platí B.

R4. *Před oddělovacím znakem "$\therefore$" smíš pořadí premis libovolně změnit, opakování odstranit a libovolné tvrzení tam přidat.*

(C.1.) Diskuse úlohy.

Diskuse úlohy je úvaha, která předchází odvození a která má odvození usnadnit. V diskusi se mohou uplatnit tyto principy.

R1. Princip zobecnitelného odvozování. Abychom dospěli odvozováním k řádku $A_1, .., A_n \therefore \forall x B$, kde premisy neobsahují x, stačí dospět k řádku $A_1, .., A_n \therefore B$. (Až ho budeme mít, logika (srv. R1) nám dovoluje připojit řádek $A_1, .., A_n \therefore \forall x B$, který byl naším původním cílem.)

R2. Princip odvozování *ex hypothesi.* Abychom dospěli odvozováním k řádku $A_1, .., A_{n-1} \therefore (A_n \rightarrow B)$, stačí dospět k řádku $A_1, .., A_{n-1}, A_n \therefore B$. (Až ho budeme mít, logika (srv. R2) nám dovoluje připojit řádek $A_1, .., A_{n-1} \therefore (A_n \rightarrow B)$, který byl naším původním cílem.)

R3. Princip odvozování sporem. Abychom z premis $A_1, .., A_n$ odvodili B, stačí z $A_1, .., A_n, \sim B$ odvodit spor, tvrzení, že něco je i není pravda. Jinými slovy, abychom z premis odvodili závěr, stačí z těchto premis a negace závěru odvodit spor. (Až to budeme mít, logika (srv. R3) nám dovoluje připojit původní řádek $A_1, .., A_n \therefore B$.)

Stručně:
- místo abys odvozoval $\forall x A$ z premis neobsahujících x, odvozuj z nich A,
- místo abys odvozoval implikaci, přidej k premisám její přední člen a odvozuj zadní člen,
- místo abys odvozoval závěr, přidej k premisám jeho negaci a odvozuj spor, to jest jakékoli tvrzení, že něco je pravda a zároveň není pravda.

Příklad C.1/1. Zpravodajský důstojník získal informace I, II, III, IV. Smí z nich utvořit níže uvedený závěr?
I : Všem jednotkám, které jsou v prostoru P a jsou zásobovány z S, velí N.
II : Jednotky, které nejsou v prostoru P, necvičí s novou zbraní.
III : Z S jsou zásobovány některé jednotky, které nejsou v P.
IV. Z S jsou zásobovány všechny jednotky, které jsou v prostoru P.
$\therefore$ N velí všem jednotkám, které cvičí s novou zbraní.

Diskuse:

Chceme z premis I, II, III, IV odvodit: N velí všem jednotkám, které cvičí s novou zbraní. To jest, chceme dospět k řádku

$I, II, III, IV \therefore \forall a$ (a je jednotka, která cvičí s novou zbraní $\rightarrow$ a je jednotka, které velí N).

K tomu stačí (srv. princip zobecnitelného odvozování) dospět k řádku

$I, II, III, IV \therefore$ (a je jednotka, která cvičí s novou zbraní $\rightarrow$ a je jednotka, které velí N).

A k tomu stačí (srv. odvozování *ex hypothesi*) dospět k řádku

$I, II, III, IV, V \therefore a$ je jednotka, které velí N), kde (pro stručnost) V je tvrzení "a je jednotka, která cvičí s novou zbraní". Ještě by se dalo odvozovat sporem, ale třeba se obejdeme bez něj.

Odvození:

Sáhněme po nejjednodušší premise; je to premisa V: "a je jednotka, která cvičí s novou zbraní":

$V \therefore$ $^{(1)}$ a je jednotka, která cvičí s novou zbraní.

Z tohoto dílčího výsledku už mnoho užitečného nedostaneme, rozhlédněme se po ostatních premisách. Která nám může říci něco nového o jednotce a cvičící s novou zbraní? Je to premisa II. Uveďme ji na scénu.

$II \therefore$ $^{(2)}$ jednotky, které nejsou v prostoru P necvičí s novou zbraní.

Z V a II vyplývá:

$II, V \quad \therefore$ $^{(3)}$ a je v prostoru P.

Podívejme se, jestli některá premisa něco neříká o jednotkách v prostoru P. Premisa IV o nich něco říká:

$IV \therefore$ $^{(4)}$ z S jsou zásobovány všechny jednotky, které jsou v prostoru P.

Přitom a je v prostoru P, takže z $^{(3)}$ a $^{(4)}$ vyplývá:

$II, IV, V \quad \therefore$ $^{(5)}$ a je zásobována z S.

Další věci o jednotce a, o které uvažujeme, se dozvíme z premisu I, proto si ji uvedeme na scénu:

$I \therefore$ $^{(6)}$ všem jednotkám, které jsou v prostoru P a jsou zásobovány z S, velí N.

Takže podle $^{(3)}$, $^{(5)}$ a $^{(6)}$:

$I, II, IV, V \quad \therefore$ $^{(7)}$ jednotce a velí N.

A to jsme chtěli, jak vidíme z diskuse, odvodit. Nyní nám logika dovoluje přidat k premisám - *chceme-li* - nadbytečnou premisu III, která mohla být ale z celé úlohy vyškrtnuta jako nepotřebná. Čili smíme napsat:

$I, II, III, IV, V \therefore$ $^{(7)}$ jednotce a velí N.

A nyní nám logika dovoluje provádět opačné kroky, než jsme dělali v diskusi: přenést V doprava za "$\therefore$" a udělat tam z toho přední člen implikace:

$I, II, III, IV \therefore$ $^{(8)}$ (a je jednotka, která cvičí s novou zbraní $\rightarrow$ a je jednotka, které velí N),

a nyní připojit obecný kvantifikátor:

$I, II, III, IV \therefore$ $^{(9)}$ $\forall a$ (a je jednotka, která cvičí s novou zbraní $\rightarrow$ a je jednotka, které velí N).

Je velmi žádoucí, aby se diskuse posléze stala pro studenty rutinním výkonem, který nedělají krok po kroku nýbrž naráz jediným "skokem". Má-li například pokročilejší student odvodit z nějakých premis I - IV

závěr: "jednání motivované ohledem na vlastní prospěch není mravní jednání", měl by říci:

> stačí z premis I - IV a z premisy "a je jednání motivované ohledem na vlastní prospěch" (označme ji V) odvodit: "a není mravní jednání".

Nebo, když se rozhodl odvozovat sporem:

> stačí z premis I - IV a z premisy "a je jednání motivované ohledem na vlastní prospěch", "a *je* mravní jednání" (označme si je V, VI) odvodit spor.

Příklad C.1/2. Stanovy jistého spolku říkají mimo jiné:

I : finanční komise se vybírá z členů organizační komise,
II : nikdo není zároveň členem organizační komise i předsednictva, není-li členem finanční komise,
III : žádný člen předsednictva není členem finanční komise.

Pánové X a Y říkají, že stanovy jsou zbytečně složité, že stejného organizačního stavu by se docílilo jednodušší formulací stanov. Podle pana X stačí ustanovení III vynechat, neboť vyplývá z I a II. Podle pana Y stačí ustanovení II a III nahradit jediným:

IV : nikdo není zároveň v organizační komisi i předsednictvu.

Pan X se mýlí: III nevyplývá z I a II. Forma premis a závěru úsudku z premis I, II na závěr III:

I' : co má vlastnost P, má vlastnost Q,
II' : co nemá vlastnost P, nemá zároveň vlastnosti Q i R,
III' : $\therefore$ nic nemá vlastnosti R i Q,

může mít pravdivé premisy a nepravdivý závěr:

I'' : všichni výtvarníci jsou umělci,
II'' : kdo není výtvarník, jistě není zároveň umělec i sochař,
III'' : $\therefore$ žádný sochař není umělec.

Místo tohoto protipříkladu by stačilo povšimnout si, že původní tři ustanovení nepřipouštějí, že by někdo mohl být zároveň ve finanční komisi, organizační komisi i v předsednictvu (vylučuje to právě ustanovení III), kdežto po vynechání ustanovení III to zbylá ustanovení I, II nebudou vylučovat. - Zato pan Y se nemýlí. Co znamená jeho tvrzení, že stejného organizačního stavu by se docílilo, kdyby ustanovení II a III byla nahrazena jediným ustanovením IV? Znamená to, že z I, II, III vyplývá dvojice ustanovení I, IV, a naopak, že z dvojice ustanovení I, IV vyplývá trojice ustanovení I, II, III. Jinými slovy, že následující úsudky jsou správné:

(i) $I, II, III \therefore I$

(ii) $I, II, III \therefore IV$

(iii) $I, IV \therefore I$

(iv) $I, IV \therefore II$

(v) $I, IV \therefore III$

Úsudky (i), (iii) jsou ovšem očividně správné a odvození zabere jediný řádek.

Diskuse k úloze (ii).

Chceme z I, II, III odvodit: "žádný člen organizační komise není členem předsednictva" (čili "$\forall a(a)$ je členem finanční komise $\rightarrow$ a je členem organizační komise)".)

Stačí z I, II, III a z předpokladů "a je členem organizační komise" a "a je členem předsednictva" (označme si je V a VI) odvodit spor. (Přesvědčte se krok za krokem použitím pravidla zobecnitelného odvozování, pravidla odvozování *ex hypothesi* a pravidla odvozování sporem, že to stačí.)

Odvození k úloze (ii).

$V \therefore$ $^{(1)}$ a je členem organizační komise,

$VI \therefore$ $^{(2)}$ a je členem předsednictva.

Sledujeme II. Kdyby nebyl ve finanční komisi, nemohl by být v těchto dvou komisích. Ale on v nich je. Takže

$II, V, VI \therefore$ $^{(3)}$ a je členem finanční komise.

Podle I, kdyby byl v předsednictvu, nemohl by být ve finanční komisi. Ale on v ní je. Tedy

$I, II, V, VI \therefore$ $^{(4)}$ a není členem předsednictva.

Ale čtěme $^{(2)}$ a vidíme:

$I, II, V, VI \therefore$ $^{(5)}$ a je i není členem předsednictva. Spor.

Diskuse k úloze (iv).

Chceme z I, IV odvodit: "kdo není ve finanční komisi, není zároveň v organizační komisi i předsednictvu". (Čili "$\forall a(a$ není ve finanční komisi $\rightarrow$ a není zároveň v organizační komisi i v předsednictvu".) Stačí tedy z I, IV a předpokladů: "a není ve finanční komisi" (stručně: VII) a "a je zároveň v organizační komisi i předsednictvu" (stručně $VIII$) odvodit spor. (Přesvědčte se o tom opět použitím pravidla zobecnitelného odvozování, pravidla odvozování *ex hypothesi* a pravidla odvozování sporem.)

Odvození k úloze (iv).

$VIII \therefore$ $^{(1)}$ a je zároveň v organizační komisi i předsednictvu,

ale podle IV, kdo je v organizační komisi, není v předsednictvu, takže

$IV, VIII \therefore$ (2) a není v předsednictvu,
takže z (1) a (2) dostaneme:
$IV, VIII \therefore$ (3) a je i není v předsednictvu. Spor.
Diskuse k úloze (v).
Chceme z I, IV odvodit: "kdo je v předsednictvu, není ve finanční komisi". (Čili "$\forall a$(a je v předsednictvu $\rightarrow$ a není ve finanční komisi)".) Stačí tedy z I, IV a předpokladů: "a je v předsednictvu", "a je ve finanční komisi" (stručně: IX, X) odvodit spor. (Opět se postupným použitím našich pravidel diskuse přesvědčte, že to stačí.)
Odvození k úloze (v).
$IX \therefore$ (1) a je v předsednictvu,
$X \therefore$ (2) a je ve finanční komisi.
Z (2) a IV vyplývá, že a není v organizační komisi, ale z (1) a I že v ní je. Tedy:
$I, IV, IX, X \therefore$ (3) a je v organizační komisi a zároveň v ní není. Spor.
(Úlohu lze velmi dobře řešit s pomocí Vennových diagramů nebo booleovské algebry. Jde o volnou parafrázi příkladu uvedeného v *Hopkins Studies.*)

Příklad C.1/3. *Hieron*, syrakuský vládce, slíbil, že dá zhotovit pro chrám korunu z ryzího zlata. Skutečně dal zhotovit korunu z určitého množství zlata a umístit ji v chrámu. Váha koruny byla přesně stejná jako váha zlata, které mělo být k jejímu zhotovení použito. Přesto se rozšířilo podezření, že zlatník si část zlata ponechal a nahradil je stříbrem. *Archimedes* (asi 287 - 212 p.n.l.) měl zjistit, zda koruna je z ryzího zlata. Nesměl však korunu nijak poškodit. Archimedes tehdy již znal Archimedův zákon (I), znal váhu daného objemu zlata i váhu daného objemu stříbra (II, III) a znal váhu koruny při vážení ve vodě (IV) i váhu koruny při vážení na suchu (V). Věděl (VI), jak souvisí váha tělesa (včetně kapalin) s jeho měrnou vahou a jeho objemem. Objem ponořeného tělesa je ovšem totožný s objemem kapaliny jím vytlačené (VII). - Z toho Archimedes odvodil závěr, které je řešením jeho úkolu. - Váhy a objemy zde budeme uvádět v jednotkách, na které jsme dnes zvyklí. Číselné údaje pěkně zaokrouhlíme, aby se čtenář mohl soustředit plně na logickou stránku dedukce. - Vahou rozumíme v celé úvaze váhu v gramech.

Diskuse. Chceme dospět odvozováním dospět k některému z řádků
$I, ..., VII \therefore$ váha $1cm^3$ látky, ze které je zhotovena koruna $\left\{ \begin{array}{c} < \\ = \end{array} \right\}$ váha

$1cm^3$ zlata.
Čtenář si povšimne, že nejde o závěr "koruna je resp. není z ryzího zlata". Logika nám nedovolí tak neopatrný závěr odvodit.

Odvození. $V \therefore$ (1) váha koruny na suchu (v gramech) = 3000,
$IV \therefore$ (2) váha koruny ve vodě = 2800,
$I \therefore$ (3) pro každé těleso t a každou kapalinu k, váha t v k = váha t na suchu - váha kapaliny k vytlačené tělesem t.
Aplikováno na náš případ:
$I \therefore$ (4) váha koruny ve vodě = váha koruny na suchu - váha vody korunou vytlačené,
takže:
$I, IV, V \therefore$ (5) váha vody korunou vytlačené = 200.
$VI \therefore$ (5) pro každé těleso t, váha tělesa t (v gramech) = objem tělesa t (v cm^3) $\times$ váha (v gramech) jednoho cm^3.
V našem případě je uvažovaným tělesem voda, jejíž $1cm^3$ váží $1g$, takže:
$I, IV, V, VI \therefore$ (6) objem vody korunou vytlačené (v cm^3) = 200,
a tedy
$I, IV, V, VI, VII \therefore$ (7) objem koruny (v cm^3) = 200,
$I, IV, V, VI, VII \therefore$ (8) váha $1cm^3$ látky, ze které je zhotovena koruna = 3000:200 = 15,
zatímco
$II \therefore$ (9) váha $1cm^3$ zlata = 19,28,
takže
$I, II, IV, V, VI, VII \therefore$ (10) váha $1cm^3$ látky, ze které je zhotovena koruna < váha $1cm^3$ zlata.
Koruna tedy nebyla z ryzího zlata. Byla tedy ze zlata a nějakého lehčího kovu, nebo - což je jen velmi teoretická možnost - z kovu těžšího než zlato a dalšího kovu či kovů. Druhá možnost byla v třetím století před naším letopočtem nejspíše vyloučena: zlato bylo asi nejtěžším používaným kovem. Teprve kdyby další premisa takovou možnost vylučovala, vyplýval by závěr, že koruna byla ze zlata a z jiného kovu. Kdyby navíc byla přijata i premisa, že zlato je nejdražší kov, který mohl být přítomen v koruně, bylo by možno odvodit závěr, že koruna byla z levnější slitiny než je zlato. Bez podobné premisy se tento závěr odvodit nedá. Logika je opatrná.

C.2. Pojmenování

Při odvozování si někdy individua pojmenováváme. Jméno, které jim dáváme musí být nic neznamenající slovo nebo písmeno. V našem výkladu k tomu účelu používáme písmena "f", "g", "h", případně s indexem. Individua si pojmenováváme tehdy, když při odvozování dospějeme ke zjištění

existuje individuum, o kterém platí *to a to*.

Pak pokračujeme v odvozování tím, že si řekneme: *"pojmenujme si je* třeba *f*", a zvolíme si přitom takové jméno "f", které je nové, dosud nepoužité; například jméno "f". Pak pokračujeme:

o f platí *to a to*.

Uvidíme to na příkladech.

Příklad C.2/1.
I : každý člověk má někoho rád,
II : existují lidé, které nemá rád nikdo
$\therefore$ někteří lidé mají rádi někoho, kdo je rád nemá.

Diskuse. Chceme dospět k řádku:

$I, II \therefore$ někteří lidé mají rádi někoho, kdo je rád nemá.

Nenabízí se zobecnitelné odvozování ani odvozování *ex hypothesi*. Zkusíme se obejít bez odvozování sporem.

Odvození.

$II \therefore$ (1) *existuje* člověk, kterého nemá rád nikdo.

Dovídáme se:

množina individuí (lidí), které nemá rád nikdo, je neprázdná; něco v ní je.

V duchu z ní vybereme namátkou jedno individuum a dáme mu nějaké jméno; musí to být jméno nové, a přitom takové, jaké může mít kterékoli individuum. Nemůže to tedy být jméno "Řehoř", protože takové pojmenování by vlastně přidalo novou informaci, která v premisách není: že vybrané individuum je muž. Ale pak bychom nevycházeli jenom z toho, říkají premisy. Mohlo bychom zvolit jméno "René", neboť to je jméno, které může mít kterýkoli člověk, např. i muž i žena. Ale my se zbavíme takovéhoto váhání nad volbou jména a zvolíme jako jméno třeba písmeno "f". A pak začneme využívat skutečnost, že nositel tohoto nového jména vyhovuje podmínce, že je nikdo nemá rád. Takže:

$II \therefore$ (2) nikdo nemá rád f–a.

Přitom ale

$I \therefore$ (3) každý má někoho rád.

Když každý, pak i f:

$I \therefore$ (4) f má někoho rád,

čili:

$I \therefore {}^{(4)}$ *existuje* individuum takové, že f ho má rád,

. Pojmenujeme si takové individuum třeba g.

$I \therefore f$ $^{(5)}$ f má rád $g-$a.

Když nikdo nemá rád $f-$a, pak ani g:

$II \therefore {}^{(6)}$ g nemá rád $f-$a.

Spojíme-li $^{(5)}$ a $^{(6)}$, dostaneme:

$I, II \therefore {}^{(7)}$ někdo (totiž f) má rád někoho (totiž $g-$a), kdo ho nemá rád.

> Pravidlo pojmenování individua. Jestliže při odvozování dospějeme k dílčímu výsledku, který říká, že
>
> existuje individuum, o kterém platí, že P,
>
> zvolíme v množině $\{f,\ g,\ h,\ f_1,\ g_1,\ h_1,\ ..\}$ nějaké jméno j, které se nevyskytuje v premisách, v závěru ani v dosavadních dílčích výsledcích, a pokračujeme:
>
> "o j platí, že P".

Toto pravidlo postačuje v případech, kdy dospějeme k dílčímu výsledku, který říká, že existuje individuum o kterém platí, že P a přitom P neobsahuje žádné proměnné. Takže postačuje, omezíme-li se na logické úlohy v přirozeném jazyce.

Zcela obecné pravidlo pojmenování individua zní pak takto.

R5. *Jestliže při odvozování dospějeme k sekventu*

$$A_1, .., A_n \therefore \exists x B,$$

smíš připojit sekvent

$$A_1, .., A_n \therefore {}_{f(z_1,..,z_k)}^{\;\;x} B,$$

jestliže $z_1, .., z_k$ *jsou právě všechny proměnné, které jsou volné v* B, $k \geq 0$, f *je* $k-$*místný funktor, který se nevyskytuje ani v žádné premise, ani v závěru, který chceme odvodit ani nikde v dosavadním odvození, a* ${}_{f(z_1,..,z_k)}^{\;\;x} B$ *je výsledkem přípustného dosazení termu* $f(z_1, .., z_k)$ *za* x *v* B.

Pojmenujeme-li individuum nějakým jménem, musí to být pokaždé jiné jméno. I v elementárním výkladu lze ukázat důvod tohoto omezení. Kdyby ho nebylo, dalo by se například z premis "některá čísla jsou sudá", "některá čísla jsou lichá" odvodit: "některá čísla jsou sudá i lichá". Důvod pro užívání termů $f(z_1, .., z_k)$ není již tak elementární. Ve výkladu pokročilejším, kde se rozliší přípustné a nepřípustné dosazení, lze ukázat, že kdybychom nedbali na proměnné $z_1, .., z_k$, mohli bychom například z premisy "každý člověk má matku" odvodit "existuje matka všech lidí". Ovšem důkaz korektnosti pravidla a úplnosti kalkulu s tímto pravidlem je už věcí teoretické symbolické logiky.

Příklad C.2/2. Z aritmetických pouček, které se vykládají na gymnáziu odvodíme: neexistují přirozená čísla n, k taková, že aspoň jedno z obou je liché a $n : k = \sqrt{2}$.
Množinu aritmetických pouček, ze které budeme brát premisy, si označíme m. Použijeme z ní dobře známé jednoduché poučky, například

jestliže $a = \sqrt{b}$, pak $a^2 = b$,
$(a : b)^2 = a^2 : b^2$,
jestliže $a : b = c$, pak $a = b.c$,
druhá mocnina přirozeného čísla je přirozené číslo,

apod. Poučky platí obecně, takže do nich smíme dosazovat. Pokud jde o náš příklad, vtip odvození spočívá v poučce

jen sudá čísla mají sudé druhé mocniny.

Logika nám usnadní jeho nalezení, ale nalézt jej musíme sami. Kdyby logika ukazovala pro každý důkaz, v čem je jeho vtip, dokazování i těch nejobtížnějších vět by se stalo triviálním, mechanickým aplikováním logiky.
Diskuse. Abychom z aritmetických pouček m odvodili náš závěr, stačí z těchto pouček a opaku našeho závěru odvodit spor. Opak závěru si označme I.
Odvození.
$I \therefore$ (1) *existuje* přirozené číslo n a existuje přirozené číslo k takové, že aspoň jedno z čísel n, k je liché a $n : k = \sqrt{2}$.
Pojmenujme si jedno z těchto čísel n třeba f. Takže:
$I \therefore$ (2) f je přirozené,
$I \therefore$ (3) *existuje* přirozené číslo k takové, že aspoň jedno z čísel f, k je liché a $f : k = \sqrt{2}$.
Pojmenujme si jedno z těchto čísel k třeba g. Takže:
$I \therefore$ (4) g je přirozené,
$I \therefore$ (5) $f : g = \sqrt{2}$,
$I \therefore$ (6) aspoň jedno z čísel f, g je liché,
. Upravíme (5) a dostaneme:
$I, \mathsf{m} \therefore$ (7) $f^2 = 2.g^2$,
$I, \mathsf{m} \therefore$ (8) g^2 je přirozené číslo.
Druhá mocnina čísla f je sudá, ale jen sudá čísla mají sudé druhé mocniny. Tedy
$I, \mathsf{m} \therefore$ (9) f je sudé.

Jinými slovy:
$I, \mathsf{m} \therefore$ *existuje* přirozené číslo d takové, že $f = 2d$.
Pojmenujeme si některé takovéto d třeba h:
$I, \mathsf{m} \therefore$ ⁽¹⁰⁾ h je přirozené číslo,
$I, \mathsf{m} \therefore$ ⁽¹¹⁾ $f = 2h$.
Tedy:
$I, \mathsf{m} \therefore$ ⁽¹²⁾ $f^2 = 4h^2$,
takže podle ⁽⁸⁾
$I, \mathsf{m} \therefore$ ⁽¹³⁾ $2g^2 = 4h^2$,
takže podle ⁽⁷⁾
$I, \mathsf{m} \therefore$ ⁽¹⁴⁾ $g^2 = 2h^2$,
a tedy
$I, \mathsf{m} \therefore$ ⁽¹⁵⁾ g je sudé.
Podle ⁽⁹⁾ a ⁽¹⁵⁾
$I, \mathsf{m} \therefore$ ⁽¹⁶⁾ f i g jsou sudá čísla. Spor
⁽¹⁶⁾ a ⁽⁶⁾ si odporují.

C.3. Odvozování po případech

Princip odvozování po případech. Předpokládejme, že chceme z nějakých premis $A_1, .., A_n$ odvodit nějaký závěr B, a v průběhu odvozování jsme dospěli k dílčímu výsledku, který říká, že
platí C_1 nebo C_2 nebo … nebo C_k.
Pak stačí, abychom náš závěr odvodili
jednak z premis $A_1, .., A_n, C_1$,
jednak z premis $A_1, .., A_n, C_2$,
....
jednak z premis $A_1, .., A_n, C_k$.
Čili abychom dospěli k řádkům
$A_1, .., A_n, C_1 \therefore B$,
$A_1, .., A_n, C_2 \therefore B$,
....
$A_1, .., A_n, C_k \therefore B$.
Až se nám to zdaří, jsme oprávněni tvrdit, že z premis $A_1, .., A_n$ byl odvozen závěr B, to jest připojit řádek
$A_1, .., A_n \therefore B$.

Princip se opírá o toto pravidlo odvozování.

R6.	*Jestliže jsi při odvozování*	$A_1, .., A_n \therefore (C_1 \vee C_2 \vee ... \vee C_k)$,
	získal řádky	$A_1, .., A_n, C_1 \therefore B$,
		$A_1, .., A_n, C_2 \therefore B$,
		....
		$A_1, .., A_n, C_k \therefore B$,
	smíš připojit řádek	$A_1, .., A_n \therefore B$.

Příklad. C.3/1. (Podle I. Copiho.) V jisté zemi všichni občané, kteří jsou politikové, mluví stále nepravdu, ale všichni občané, kteří jsou nepolitikové, mluví stále pravdu. Cizinec potkal občany této země. Zeptal se jednoho z nich: "Jste politik?". Dotázaný odpověděl, ale nezřetelně. Druhý z oněch mužů řekl: "Ten pán, kterého jste se ptal *řekl, že* není politik". A třetí z mužů dodal: "Ale on je politik". - Kolik bylo mezi těmito třemi politiků. - Informace uvedené v zadání si označíme pro stručnost m. Chceme získat závěr o počtu politiků mezi těmito třemi muži (např. "není mezi nimi žádný politik", "jsou tam aspoň (přesně, nejvýše) dva politici" apod.).
Odvození:
m $\therefore$ $^{(1)}$ dotázaný je politik nebo dotázaný není politik.

To jsou dvě možnosti, dva případy: C_1 : dotázaný je politik, a C_2 : dotázaný není politik. Nejprve uvážíme případ, kdy platí C_1, to jest budeme vycházet z premis m, C_1, to je jedna větev našeho uvažování, a potom uvážíme případ, kdy platí C_2, to jest budeme vycházet z premis m, C_2, to je druhá větev našeho uvažování. Když v obou případech dospějeme k témuž závěru, pak (protože platí-li m, platí C_1 nebo C_2 nebo obojí, jsme oprávěni tvrdit, že jsme z m odvodili tento závěr.

$C_1 \therefore$ (2) dotázaný je politik.

Podle zadání příkladu $A_1, .., A_n$ politik musí zalhat a říci že není politik:

m, $C_1 \therefore$ (3) dotázaný řekl, že je nepolitik.

Ale pak druhý muž říkal pravdu a musel být nepolitikem a třetí muž měl pravdu, takže není politik; takže

m, $C_1 \therefore$ (4) druhý muž je nepolitik,

m, $C_1 \therefore$ (5) třetí muž je nepolitik.

Tedy v případě, že platí kromě zadání i C_1 čili v případě, že dotázaný je politik máme:

m, $C_1 \therefore$ (5) mezi třemi muži je jediný politik.

Teď uvažme případ C_2: dotázaný muž je nepolitik, a tedy pravdovmluvný člověk.

$C_2 \therefore$ dotázaný muž je nepolitik.

m, $C_2 \therefore$ (3) dotázaný řekl, že je nepolitik.

Ale pak druhý muž říkal pravdu a musel být nepolitikem ale třetí muž zalhal, když řekl, že dotazovaný je politik; takže

m, $C_2 \therefore$ (4) druhý muž je nepolitik,

m, $C_2 \therefore$ (5) třetí muž je politik.

Tedy v případě, že platí kromě zadání i C_2 čili v případě, že dotázaný není politik máme:

m, $C_2 \therefore$ (5) mezi třemi muži je jediný politik.

totiž třetí z našich tří mužů.

Platí-li zadání $A_1, .., A_n$, platí C_1 nebo C_2, ale v obou případech je mezi třemi muži jediný politik. Tedy

m $\therefore$ (5) mezi našimi třemi muži je jediný politik.

Mnohé zábavné úlohy jsou dobře řešitelné odvozováním po případech. Uveďme ještě aspoň jednu.

Příklad. C.3/2. Z malého hradního nádvoří vedou tři branky; jsou označeny α, β, γ. Na brance α je nápis

$$\boxed{\text{HLADOMORNA}}$$

Na brance β je nápis

A na brance γ je nápis

MEDVĚDI JSOU ZA BRANKOU γ

BRANKA α VEDE DO HLADOMORNY

Víme jen toto.
A. Jedna a jen jedna z těchto tří branek vede do hladomorny, jedna a jen jedna k zlým medvědům a jedna a jenom jedna vede na svobodu.
B. Nápis na brance vedoucí ven je pravdivý.
C. Nápis na brance vedoucí k medvědům je nepravdivý.
Diskuse. Chceme z A, B, C odvodit závěr, který by nám řekl o některé brance, že vede na svobodu, anebo závěr, který by nám řekl, že žádná branka na svobodu nevede.
Odvození.
$A \therefore$ $^{(1)}$ na svobodu vede branka α nebo branka β nebo branka γ.
Nejprve uvažme *případ první*, to jest předpokládejme, že branka α vede na svobodu. Pro stručnost si tento předpoklad označme D. Víme: kdyby nás tento předpoklad dovedl ke sporu, pak neplatí.
$D \therefore$ $^{(2)}$ α vede na svobodu.
Podle B musí být nápis "hladomorna" pravdivý, takže branka vede na svobodu i do hladomorny, ale to podle A neplatí.
$A, B, D \therefore$ $^{(3)}$ α vede i nevede na svobodu (spor).
Předpoklad D, že α vede na svobodu se ukázal nepravdivým. Nyní uvažme *případ druhý*, to jest předpokládejme, že branka β vede na svobodu. Pro stručnost si tento předpoklad označme E.
$E \therefore$ $^{(4)}$ β vede na svobodu.
Pak je (srv. B) nápis na brance β pravdivý a tedy:
$B, E \therefore$ $^{(5)}$ medvědi jsou za brankou γ,
a podle C:
$B, C, E \therefore$ $^{(6)}$ branka α nevede do hladomorny.
Zjistili jsme, že za předpokladu E β vede na svobodu, γ k medvědům, a pak podle A musí platit
$A, B, C, E \therefore$ $^{(7)}$ branka α vede do hladomorny (spor s $^{(6)}$).
Zbývá *případ třetí*. Předpokládejme, že γ vede na svobodu. Pro stručnost si tento předpoklad označme F.
$F \therefore$ $^{(8)}$ γ vede na svobodu,
$B, F \therefore$ $^{(9)}$ γ má pravdivý nápis,
$B, F \therefore$ $^{(10)}$ α vede do hladomorny.

Takže podle A ani α ani γ nevedou k medvědům, takže
$A, B, F \therefore$ $^{(11)}$ β vede k medvědům,
$A, B, C, F \therefore$ $^{(12)}$ β má nepravdivý nápis,
a konečně ještě můžeme dodat, že
$A, B, C, F \therefore$ $^{(13)}$ nápis na α je pravdivý.
Spor nenastal. Z premis vyplývá $^{(8)}$ - $^{(13)}$.
(Podle časopisu Kviz.)

Také v matematice se často odvozuje po případech. Máme-li například odvodit z dosavadních znalostí větu: "jsou-li a, b přirozená čísla a přitom b je prvočíslo, pak jsou nesoudělná nebo b je dělitelem čísla a", je dobré rozdělit si úvahu na sledování dvou možností, dvou případů: "a, b jsou soudělná (tj. mají společného dělitele různého od jedné)", a "a, b nejsou soudělná". Máme-li dokázat:

je-li $c > 0$, pak $|a - b| < c$ tehdy a jen tehdy, když $a - c < b < a + c$, je dobré uvážit jednak případ, kdy $|a - b|$ je záporné číslo, jednak případ, kdy $|a-b|$ není záporné číslo. Budeme-li například chtít dokázat, že z každé nekonečné posloupnosti reálných čísel lze vybrat monotonní posloupnost, můžeme uvážit případ, kdy daná posloupnost nemá největší člen, případ, kdy z dané posloupnosti lze vybrat posloupnost nemající největší člen, a konečně případ, kdy není pravda, že z dané posloupnosti lze vybrat posloupnost nemající největší člen.

C.4. Chybné kroky

Příklad C.4/1.
I : všichni násilníci jsou zbabělci, ale ne všichni jsou lháři
$\therefore$ ne všichni lháři jsou zbabělci.
Dejme tomu, že budeme usuzovat takto.
Diskuse. Chceme dospět k
$I \therefore$ ne všichni lháři jsou zbabělci.
K tomu stačí z I a "všichni lháři jsou zbabělci" (což si stručně označíme II) odvodit spor.
Odvození.
$I \therefore$ $^{(1)}$ všichni násilníci jsou zbabělci,
$I \therefore$ $^{(2)}$ ne všichni násilníci jsou lháři.
$^{(2)}$ lze ovšem vyjádřit i jinými slovy, takže máme:
$I \therefore$ $^{(3)}$ *existuje* násilník, který není lhář.
Když si ho pojmenujeme f, bude platit:

$I \therefore$ $^{(4)}$ f je násilník,
$I \therefore$ $^{(5)}$ f není lhář.
Pohleďme co říká druhá premisa.
$II \therefore$ $^{(6)}$ všichni lháři jsou zbabělci.
Ale my víme z $^{(5)}$, že f není lhář. Z $^{(5)}$ a $^{(6)}$ tedy vyplývá:
$I, II \therefore$ $^{(7)}$ f není zbabělec.
Z $^{(4)}$ a $^{(1)}$ ale vyplývá:
$I \therefore$ $^{(8)}$ f je zbabělec.
Takže podle $^{(8)}$ a $^{(7)}$
$I, II \therefore$ $^{(9)}$ f je zbabělec a zároveň není zbabělec. Spor.

V odvození je chyba. Napsali jsme jistý řádek, který jsme nebyli oprávněni napsat, protože dílčí výsledek v něm uvedený nebyl ani premisou ani nevyplýval z předchozích dílčích výsledků. Najděte ten řádek a ukažte protipříklad, který se ho týká.

Příklad C.4/2.
I : všichni mladší učitelé hlasovali pro češtinářův návrh,
II : kdo nehlasoval pro češtinářův návrh, hlasoval pro ředitelův návrh
$\therefore$ žádný mladší učitel nehlasoval pro ředitelův návrh.
Diskuse. Chceme dospět k
$I, II \therefore \forall a(a$ je mladší učitel $\rightarrow a$ nehlasoval pro ředitelův návrh).
K tomu stačí, budeme-li místo "a je mladší učitel" psát jen III, dospět k
$I, II, III \therefore$ a nehlasoval pro ředitelův návrh.
Odvození. $III \therefore$ $^{(1)}$ a je mladší učitel,
$I, III \therefore$ $^{(2)}$ a hlasoval pro češtinářův návrh.
Sledujeme však premisu II.
$II \therefore$ $^{(3)}$ kdo nehlasoval pro češtinářův návrh, hlasoval pro ředitelův návrh.
Podle $^{(3)}$, kdyby *a nehlasoval* pro návrh češtinářův, hlasoval by pro návrh ředitelův, ale podle $^{(2)}$ *a hlasoval* pro češtinářův návrh. Nemohl tedy hlasovat pro návrh ředitele. Tedy:
$I, II, III \therefore$ $^{(4)}$ a nehlasoval pro návrh ředitelův.

I v tomto odvození je chyba.

Při intuitivním a polointuitivním odvozování si stále musíme klást otázku, zda jsou jednotlivé úsudky, které děláme jakožto kroky odvození, správné, to jest, zda závěr každého dílčího kroku vyplývá z dílčích výsledků, na které se v tomto kroku odvoláváme. Logika je přitom velmi přísná: nedovoluje přibrat na pomoc žádná další tvrzení, i kdyby to byla tvrzení samozřejmě pravdivá.

V příkladu C.4/1 jsme usuzovali takto.

(6)	všichni lháři jsou zbabělci,	vše, co má vlastnost P, má vlastnost Q,
(5)	f není lhář	f nemá vlastnost P,
(7)	$\therefore$ f není zbabělec	$\therefore$ f nemá vlastnost Q.

a to je nesprávný úsudek. Je to stejné, jako kdybychom usuzovali "všichni lidé jsou smrtelní, můj pes není člověk, tedy můj pes není smrtelný". Je to zřejmé i z tohoto grafického protipříkladu:

$$\begin{array}{cccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ P & P & P & & & \\ Q & Q & Q & Q & Q & \\ & & & & f & \end{array}$$

V příkladu C.4/2 jsme usuzovali:

(3)	kdo nehlasoval pro češtinářův návrh, hlasoval pro ředitelův	vše, co nemá vlastnost P, má vlastnost Q,
(2)	f hlasoval pro češtinářův	f má vlastnost P,
(4)	$\therefore$ f nehlasoval pro ředitelův	$\therefore$ f nemá vlastnost Q.

a to je opět nesprávný úsudek. Ukazuje to grafický protipříklad

$$\begin{array}{cccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ P & P & & & & \\ & Q & Q & Q & Q & Q \\ & f & & & & \end{array}$$

anebo slovní protipříklad. Individua čili uvažované objekty jsou města. Využijeme skutečnosti, že počet obyvatel Prahy je mezi jedním miliónem až (buďme štědří) dvěma milióny obyvatel. "Každé město, které nemá méně než 3 milióny obyvatel (čili 2 milióny nebo více) má alespoň půl miliónu obyvatel. Praha má méně než 3 milióny obyvatel. Tedy Praha nemá alespoň půl miliónu obyvatel."

Příklad C.4/2 téměř každý vyřeší špatně: řekne, že závěr z premis vyplývá. To proto, že z premis vyrozumí:

návrh mladšího učitele a návrh ředitele se vzájemně vylučují.

To v premisách není, ale sugestivně se to z nich nabízí; jazyk má takovou schopnost sugestivního klamu. Ovšem co v premisách není výslovně, to tam pro logiku není vůbec. Podobné sugestivně se nabízející obsahy premis odmítá ovšem matematika, právo i všechny jiné obory lidského počínání, kde naprostá přesnost formulace je žádoucí. Chceme-li, aby něco bylo při odvozování důsledků vzato v úvahu, předložme to v podobě premisy.
Dejme tomu, že odvozujeme z premis $A_1, .., A_n$ závěr B a v odvození je chyba. Znamená to, že závěr z premis nevyplývá? Jistě ne. Pythagorova věta vyplývá z určitých elementárních pouček geometrie, a bude z nich vyplývat, i když se student při jejím odvozování z těchto elementárních pouček dopustí chyb.

(D) Porovnání se sylogistikou

(1) Sylogistika nevyžaduje žádné dovednosti v užívání kvantifikátorů, a to může (ale také nemusí) být pokládáno za její didaktickou přednost. Náš model žádá z těchto dovedností, jak vidíme z příkladů, jen jisté minimum, které je dostupné všem studentům vyšších ročníků střední školy a studentům vysokých škol. Symbolicky potřebujeme zapisovat při odvozování jen závěr; jinak potřebujeme symbolický zápis a formalizaci při hledání protipříkladu.

(2) Polointuitivní přirozená dedukce pokrývá veškeré správné sylogistické usuzování, avšak jinak než přeříkáním podmínek správnosti; přitom veškeré správné sylogistické usuzování daleko přesahuje. Sahá až k řešení úloh, kde závěr vyplývající z premis je i pro inteligentního člověka nečekaný a úsudek přirozenou dedukcí objevný.

(3) Polointuitivní přirozenou dedukci, lze plynule zdokonalovat, tj. zpřesňovat a doplňovat o další pravidla produkce, a takto lze dospět až k plnému výkladu kalkulu predikátové logiky prvního řádu. Sylogistika není takto "prodloužitelná" do predikátové logiky prvního řádu. Kdybychom chtěli po výkladu sylogistiky vyložit predikátovou logiku prvního řádu, musíme začít od nuly; nemáme v podstatě na co navázat.

(4) Výklad sylogistiky vždy obsahuje výklad jistého *algoritmu rozhodnutí*, zda daný sylogismus je správný, zda jeho závěr vyplývá z premis. Většinou je dána množina nějakých podmínek a aplikace algoritmu na sylogismus spočívá v pouhém postupném zjištění, zda je sylogismus splňuje. Jde kupříkladu o tuto kolekci podmínek správnosti sylogismu.

1. *Sylogismus musí obsahovat přesně tři termíny a každý musí být použit na obou místech, kde se vyskytuje, v témže smyslu.*
2. *Střední termín musí být roztříděn aspoň v jedné premise.*
3. *Termín roztříděný v závěru musí být roztříděný i v premise.*
4. *Sylogismus musí mít aspoň jednu kladnou premisu.*
5. *Je-li některá premisa záporná, musí být i závěr záporný.*
6. *Není-li žádná premisa záporná, závěr nesmí být záporný.*

Termín aristotelského výroku se v sylogistice nazývá roztříděným, když je v tomto výroku "vzat v celém rozsahu". Ve výroku "všechna X jsou Y" je roztříděn termín X a nikoli termín Y, ve výroku "žádné X není Y" je roztříděn jak termín X, tak termín Y. Ve výrocích "některá X jsou Y", "některá X nejsou Y" není roztříděn žádný termín. Z podmínek 1-7 lze odvodit podmínky další:
7. *Počet roztříděných termínů v závěru správného sylogismu musí být aspoň o jednu menší než úhrný počet roztříděných termínů v premisách,*
8. *správný sylogismus nikdy nemá obě premisy částečné,*
9. *je-li některá premisa částečná, pak z premis nevyplývá obecný závěr.*
Jiný algoritmus předpokládá, že rozeznáme figuru a modus sylogismu a že známe seznam modů správných sylogismů pro každou ze čtyř figur, například s pomocí středověkých mnemotechnických veršů:

> Barbara, Celarent, Darii, Ferio*que prioris*,
> Cesare, Camestres, Festino, Baroco *secundae*,
> *tertia* Darapti, Disamis, Datisi, Felapton, Bocardo, Ferison, *habet; quarta insuper addit*
> Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison.

Student, ten průměrný a horší, nechce myslet; chce návod k mechanickému vyřešení úlohy. Nejsem si jist, zda mu gymnázium v této nechuti k uvažování a náklonnosti k algoritmu nevychází až příliš vstříc. Sylogismus i obvyklý polysylogismus je příliš krátký na to, aby se na něm student mohl učit deduktivnímu uvažování. Navíc, zná-li pro sylogistiku nějaký algoritmus rozhodnutí (a je těžké představit si, že bychom mu algoritmy rozhodnutí zatajili), už jej stěží přimějeme k deduktivnímu uvažování. Oproti tomu námi předložená varianta přirozené dedukce je právě vodítkem k deduktivnímu uvažování, trpělivému analytickému myšlenkovému postupu, který je v principu obdobný jako deduktivní uvažování ve vědě.

(5) Celý výklad dedukce, který zde byl v hlavních rysech naskicován,

tvoří ovšem jen část výkladu logiky. Vysokoškolská přednáška logiky musí mít i témata další, podle toho, komu je právě určena:
(a) *Jazyk.* (b) *Deduktivní usuzování.* (c) *Objasňování významu výrazů. Definice.* (d) *Induktivní usuzování.* (e) *Struktury.* (f) *Logika v deduktivních vědách.* (g) *Logika v empirických vědách.* (h) *Argumentace.* (i) *Aplikace na daný obor.*
V různých kapitolách je potřebné ukázat nějaká odvození. Například ukázat, že vyslovením chybné definice lze do teorie zavést spor nebo ukázat příklad vysvětlení (explanace) jevu J, to jest příklad odvození výroku popisujícího jev J ze známých zákonů a výroků popisujících okolnosti, za nichž jev J nastal. Například ukázat odvození z nějakých axiómů. Například ukázat trochu složitější dedukci v empirické vědě. Například ukázat vlastnosti důležitých druhů struktur. Atd. Pokud jsme výklad o vztahu vyplývání závěru z premis a o odvoditelnosti omezili na sylogistiku, příklady, které tu byly vyjmenovány, budou jakoby z jiného světa. Výklad s polointuitivní přirozenou dedukcí umožní, aby student pochopil i složitější odvození, která jim učitel sám předvede.

1.3 Logika v aritmetice *Vítězslav Švejdar*

Matematikové formulují a dokazují tvrzení. Výsledkem jejich práce je tedy zpravidla (ne-li vždy) nalezení nějakého důkazu. Důkazy a jejich analýza je to, co zajímá logiky; *důkaz* je totiž jedním z nejdůležitějších logických pojmů. V tomto textu se pokusíme na několika konkrétních jednoduchých příkladech ukázat, jaké otázky si logikové kladou, jak může vypadat logická analýza nějakého důkazu a jaké výsledky může poskytnout.

Čtenáře tohoto textu si představujeme buď jako studenta, který si na střední škole všimnul, že některé matematické důkazy jsou zajímavé a poučné, ale dále se matematikou už nezabýval, nebo jako učitele, který má takového studenta učit logiku.

1.3.1 Dělitelnost a prvočísla

Předpokládejme, že uvažujeme o dělitelnosti přirozených čísel, tj. čísel 0, 1, 2, atd. Čtenář jistě ví, co dělitelnost znamená, ale pro jistotu připomeňme definici: přirozené číslo a *dělí* přirozené číslo b (nebo b *je dělitelné* číslem a), jestliže existuje číslo v takové, že $a \cdot v = b$. Fakt, že a dělí b, symbolicky zapisujeme $a \mid b$. Nejzákladnější vlastnosti relace dělitelnosti jsou tyto: platí-li $a \mid b$ a $b \mid c$, pak i $a \mid c$; $1 \mid b$ pro každé číslo b; platí-li $a \mid b$ a zároveň $b \mid a$, pak $a = b$; a konečně $a \mid 0$ pro každé číslo a, protože každé číslo a lze znásobit vhodným číslem v, totiž nulou, tak, aby výsledek byl nula.

Uvažujme nyní tvrzení, že dělí-li libovolné prvočíslo součin dvou čísel, pak dělí jeden z činitelů.

Tvrzení 1 *Je-li p prvočíslo a platí-li $p \mid a \cdot b$, pak $p \mid a$ nebo $p \mid b$.*

Jak známo, prvočíslo je definováno jako číslo větší než 1, které nemá jiné dělitele než jedničku a sebe sama. Fakt, že p je prvočíslo, se tedy pozná podle dělitelů čísla p. Tvrzení 1 dává do souvislosti dvě podmínky pro číslo p, z nichž jedna se týká dělitelů čísla p, druhá čísel dělitelných číslem p.

Domluvme se na významu několika *logických symbolů*, jejichž užívání nám někdy umožní zkrátit a zpřehlednit zápisy tvrzení, vlastností a podmínek. Symboly $\forall$ a $\exists$ nazýváme *kvantifikátory* a čteme je "pro všechna" resp. "existuje". Symboly &, $\vee$, $\rightarrow$ a $\neg$ nazýváme *konjunkce*, *disjunkce*, *implikace* a *negace* a souhrnně je označujeme jako *logické spojky*. Symbolické zápisy podmínek, vlastností a tvrzení nazýváme *formule*. Jsou-li φ a ψ formule, pak $\varphi \mathbin{\&} \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ a $\neg\varphi$ jsou opět formule; čteme je "φ a (zároveň) ψ", "φ nebo ψ", "pokud φ, pak ψ" a "ne φ". Formuli $\neg\varphi$ lze také číst "non φ" nebo "není pravda φ". Spojku $\vee$ chápeme v nevylučovacím smyslu: $\varphi \vee \psi$ platí i v případě, kdy platí φ i ψ. Je-li x proměnná a φ formule, pak $\forall x\varphi$ i $\exists x\varphi$ jsou formule. Čteme je "pro každé x φ" resp. "existuje x takové, že φ". Spojkám & a $\vee$ přisuďme vyšší prioritu než implikaci: $\varphi \rightarrow \psi \vee \chi$ znamená $\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)$.

Podmínku $a \mid b$ lze tedy s užitím logických symbolů zapsat jako $\exists v(a \cdot v = b)$. Rovněž definici prvočísla a podmínku z tvrzení 1 lze zapsat symbolicky:

$$p > 1 \ \& \ \forall x(x \mid p \ \rightarrow \ x = 1 \ \vee \ x = p)$$

$$p > 1 \ \& \ \forall a \forall b(p \mid a \cdot b \ \rightarrow \ p \mid a \ \vee \ p \mid b). \qquad (*)$$

Snadno lze dokázat, že každé číslo p splňující podmínku $(*)$ je prvočíslem. Důkaz vypadá takto:

> Nechť p splňuje podmínku $(*)$, máme ověřit, že p je prvočíslem. První část definice, totiž $p > 1$, je splněna, protože i v $(*)$ se požaduje, aby p bylo větší než 1. Nechť je dáno libovolné x takové, že $x \mid p$. Máme ověřit, že $x = 1$ nebo $x = p$. Podmínka $x \mid p$ znamená, že existuje v takové, že $x \cdot v = p$. Pak platí $v \mid p$ a také $p \mid x \cdot v$. Podle podmínky $(*)$ platí $p \mid x$ nebo $p \mid v$. Pokud $p \mid x$, pak, vzhledem k tomu, že $x \mid p$, máme $x = p$. Pokud $p \mid v$, pak, ze stejného důvodu, $v = p$. To dohromady s $x \cdot v = p$ dává $x = 1$.

Tím jsme ověřili, že čísla splňující podmínku $(*)$ je třeba hledat pouze mezi prvočísly. Položme si opačnou otázku:

- *Lze dokázat, že každé prvočíslo splňuje podmínku* $(*)$*, tj. lze dokázat tvrzení 1?*

Číslo 2, které je nejmenším prvočíslem, podmínku $(*)$ splňuje, což je vidět z tohoto důkazu:

> Nechť $2 \mid a \cdot b$. Chceme ověřit, že $2 \mid a$ nebo $2 \mid b$. Předpokládejme, že tomu tak není, tj. že 2 nedělí a ani b. To znamená, že a i b jsou

lichá čísla, a tedy existují u a v taková, že $a = 2u + 1$ a $b = 2v + 1$. Pak platí

$$a \cdot b = (2u + 1) \cdot (2v + 1) = 2(2uv + u + v) + 1.$$

Z toho plyne, že $a \cdot b$ je lichým číslem, což je spor s předpokladem $2 \mid a \cdot b$.

Podobně, jen nepatrně obtížněji, lze dokázat, že rovněž číslo 3 splňuje podmínku $(*)$:

Nechť $3 \mid a \cdot b$. Chceme ověřit, že $3 \mid a$ nebo $3 \mid b$. Pokud ani jedno neplatí, pak a je tvaru $3u + 1$ nebo $3u + 2$, a b je tvaru $3v + 1$ nebo $3v + 2$. Součin $a \cdot b$ je pak roven jednomu z čísel $9uv + 3u + 3v + 1$, $9uv + 6u + 3v + 2$, $9uv + 3u + 6v + 2$, $9uv + 6u + 6v + 4$, z nichž žádné není dělitelné třemi. To je spor s předpokladem $3 \mid a \cdot b$.

A opět podobně lze postupovat v případě jakéhokoliv jiného prvočísla. Například platí-li $p = 19$:

Nechť $19 \mid a \cdot b$. Chceme ověřit, že $19 \mid a$ nebo $19 \mid b$. Pokud ne, pak a má jeden z tvarů $19u + 1, .., 19u + 18$ a b má jeden z tvarů $19v + 1, .., 19v + 18$. Pak jejich součin $a \cdot b$ je roven jednomu z čísel ..., z nichž žádné není dělitelné devatenácti. To je spor s předpokladem $19 \mid a \cdot b$.

Tentokrát jsme nenapsali kompletní důkaz. Třemi tečkami je označen seznam možností, jaký tvar může mít součin $a \cdot b$. Těchto možností je 324 a lze ověřit, že ve všech případech opravdu vyjde číslo, které není dělitelné devatenácti.

Takže, dokázali jsme tvrzení 1? Nezbývá než konstatovat, že ne, nedokázali. A doufáme, že toto konstatování je alespoň pro některé čtenáře překvapivé. Pro každé prvočíslo p jsme napsali důkaz D_p tvrzení, že p splňuje podmínku $(*)$ (nebo jsme alespoň podali návod k sestrojení takového důkazu). Nenapsali jsme ale *jeden* důkaz tvrzení vyjádřeného formulí

$$\forall p\Big(p > 1 \ \&\ \forall v(v \mid p \rightarrow v = 1 \vee v = p) \rightarrow \\ \rightarrow \forall a \forall b(p \mid a \cdot b \rightarrow p \mid a \vee p \mid b)\Big).$$

Otázka, zda tuto formuli, a tím tvrzení 1, lze dokázat, je tedy stále ve hře.

Než na ni odpovíme, uvědomme si, že tato otázka není zcela jednoznačná. V dosavadním textu byla řeč o důkazech faktů, že čísla 2, 3, 5, … splňují podmínku $(*)$. Tyto důkazy jsme označili D_2, D_3, D_5, atd. Ještě předtím jsme uvedli důkaz, že každé číslo splňující podmínku $(*)$ je prvočíslo. Ten označme D_0. Prohlédneme-li si důkazy D_0, D_2, D_3 a D_{19} ještě jednou, můžeme pozorovat, že jsme v nich použili určité vědomosti o přirozených číslem. Například v důkazu D_2 jsme nejprve použili fakt, že každé číslo lze psát ve tvaru $2u$ nebo $2u+1$, a později ještě fakt, že každé číslo lze psát *pouze* v jednom z těchto tvarů, takže číslo tvaru $2z+1$ nelze zároveň psát ve tvaru $2u$. Oba fakty najednou lze zapsat formulí

$$\forall x \exists ! u \exists ! r (x = 2u + r \ \& \ r < 2),$$

kde $\exists !$ znamená "existuje právě jedno". Zápis $\exists !$ považujeme nikoliv za nový kvantifikátor, ale za zkratku: $\exists ! u \delta(u)$ je zkrácený zápis pro formuli $\exists u(\delta(u) \ \& \ \forall u'(\delta(u') \rightarrow u' = u))$. V ostatních příkladech důkazů lze odhalit další předem přijaté *předpoklady*, které vyjadřují naši znalost o přirozených číslech. Například v D_0 je zřejmé užití předpokladu

$$\forall x \forall y \forall z(x \cdot z = y \cdot z \ \& \ z \neq 0 \rightarrow x = y),$$

který vyjadřuje, že nenulovým číslem lze krátit.

Konstatujme, že v důkazech je nutno počítat s předem přijatými předpoklady, kterým říkáme *axiomy.* Axiomy vyjadřují naši apriorní znalost o zkoumané oblasti. Kromě seznamu axiomů je důležitý také seznam symbolů, které připouštíme ve formulích. Seznamu *mimologických* symbolů (tj. symbolů jiných než logické spojky, kvantifikátory, závorky a rovnítko, které pokládáme za vždy přípustné) říkáme *jazyk.* V našem případě jazyk obsahuje symboly $+$ a $\cdot$ pro operace s přirozenými čísly, symboly 0 a 1 pro označení konkrétních přirozených čísel, a symboly $|$ a $<$, kterým říkáme *relační* (nebo též *predikátové*) symboly. *Teorie* je dána volbou jazyka a volbou množiny axiomů. Jazyk určuje, o čem v dané teorii lze mluvit, axiomy určují, které z formulí onoho jazyka pokládáme za základní pravdy, tj. takové, které jsou zřejmé, předem dohodnuté nebo předem zdůvodněné.

V tomto místě by čtenáře mohlo napadnout několik námitek, z kterých nás zvlášť zajímá tato. Mohlo by se zdát, že vyhledávání předpokladů skrytých v důkazech je neperspektivní práce, protože v daných důkazech lze jít do větších a větších podrobností, a další předpoklady se pravděpodobně objeví, vezmeme-li v úvahu další důkazy. Vyhledávání a formulování axiomů s cílem vytvořit teorii, která by pak mohla sloužit jako prostředí pro další práci, by mohlo trvat velmi dlouho nebo dokonce donekonečna. Nuže, tato situace vyloučena není, ale typické je spíš to, že nenastane. Analýzou několika podstatných důkazů lze často dospět k množině předpokladů, která je pak postačující pro mnohé nebo dokonce všechny další důkazy. Lze se domnívat, že právě toto je jedna z okolností, které z logiky dělají přitažlivou disciplínu. Například jedna z nejdůležitějších matematických teorií, Gödel-Bernaysova teorie množin, má přehlednou množinu axiomů pozůstávající ze čtrnácti formulí.

V následujícím paragrafu ukážeme, že lze navrhnout jednoduchou množinu axiomů vyjadřujících pravidla počítání s čísly, a takovou, že z ní lze dokázat řadu dalších faktů včetně tvrzení 1. Abychom se vyhnuli určitým technickým obtížím, budeme pracovat raději s *celými* než s přirozenými čísly. Prvočíslo v oboru celých čísel budeme definovat jako číslo, které nemá žádné netriviální dělitele, přičemž za triviální dělitele čísla x se považují čísla x, $-x$, 1 a -1.

1.3.2 Celočíselná aritmetika

Celá čísla lze sčítat a násobit, přičemž význačné postavení mají čísla 0 a 1. Kromě operací budeme mluvit také o uspořádání. Domluvme se tedy, že ve formulích připouštíme kromě logických symbolů (tj. logických spojek a kvantifikátorů, závorek a rovnítka) ještě pět mimologických symbolů $+$, $\cdot$, 0, 1, $<$. Tím jsme definovali *jazyk* celočíselné aritmetiky. Domluvme se na užívání dalších symbolů a zkrácených zápisů: $x \leq y$ znamená $x < y \;\vee\; x = y$, $x = y = z$ znamená $x = y \;\&\; y = z$, apod. Za první pokus definovat *axiomy* celočíselné aritmetiky považujme následující seznam předpokladů:

A1: $\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$

A2: $\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$

A3: $\forall x \forall y (x + y = y + x)$

A4: $\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$

A5: $\forall x (x + 0 = x)$

A6: $\forall x(x \cdot 1 = x)$

A7: $\forall x \exists y(x + y = 0)$

A8: $\forall x \forall y \forall z(z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y)$

A9: $0 \neq 1$

A10: $\forall x \forall y \forall z(x < y \ \& \ y < z \ \rightarrow \ x < z)$

A11: $\forall x \forall y(x < y \ \rightarrow \ \neg(y < x))$

A12: $\forall x \forall y(x < y \ \vee \ x = y \ \vee \ y < x)$

A13: $\forall x \forall y \forall z(x < y \ \equiv \ x + z < y + z)$

A14: $\forall x \forall y \forall z(0 < z \ \rightarrow \ (x < y \ \equiv \ x \cdot z < y \cdot z))$

A15: $\forall x \forall y(0 < y \ \rightarrow \ \exists! z \exists! v(x = y \cdot z + v \ \& \ 0 \leq v < y))$

Symbol $\equiv$ užitý v A13 a v A14 čteme "právě když". Lze jej považovat za pátou logickou spojku, nebo za zkratku: $\varphi \equiv \psi$ je zkrácený zápis pro formuli $(\varphi \rightarrow \psi) \ \& \ (\psi \rightarrow \varphi)$. Axiomy A1–A6 vyjadřují, že sčítání i násobení jsou asociativní a komutativní operace, nula je neutrální vůči sčítání, jednička je neutrální vůči násobení. A10–A12 jsou *axiomy uspořádání*, A1–A14 se v algebře označují jako axiomy *uspořádaného oboru integrity*. Číslům větším než nula říkejme *kladná*, číslům menším než nula *záporná*. *Nezáporná* čísla jsou všechna kladná čísla a číslo nula, *nekladná* jsou všechna záporná a číslo nula. A15 je axiom o *dělení se zbytkem*: každé číslo lze dělit každým nenulovým číslem, výsledkem je jednoznačně určený podíl a jednoznačně určený nezáporný zbytek menší než dělitel. Číslo y takové, že $x + y = 0$, které díky A7 existuje pro každé číslo x, se nazývá číslem *opačným* k číslu x. Snadno lze dokázat, že opačné číslo k číslu x je číslem x určeno jednoznačně:

> Nechť $x + y_1 = 0$ a také $x + y_2 = 0$. Pak platí $y_1 \overset{\mathsf{A5}}{=} y_1 + 0 = y_1 + (x + y_2) \overset{\mathsf{A1}}{=} (y_1 + x) + y_2 \overset{\mathsf{A3}}{=} (x + y_1) + y_2 = 0 + y_2 \overset{\mathsf{A3}}{=} y_2 + 0 \overset{\mathsf{A5}}{=} y_2$. Tedy $y_1 = y_2$.

Díky tomuto důkazu můžeme zavést obvyklé značení: číslo opačné k číslu x značíme $-x$. Dále se domluvme, že závorky se v některých případech mohou vynechávat: $x \cdot y + z$ znamená $(x \cdot y) + z$ (násobení má tedy vyšší prioritu než sčítání), $x + y + z$ znamená $(x + y) + z$ nebo (což je díky axiomu A1 totéž) $x + (y + z)$. A konečně se domluvme, že tvrdíme-li, že nějaká formule φ je dokazatelná, a φ obsahuje nekvantifikované proměnné (například x a y), představujeme si, že ony proměnné jsou kvantifikovány univerzálně (a dokazatelností formule φ tedy například v našem případě myslíme dokazatelnost formule $\forall x \forall y \varphi$). Tuto dohodu využijeme ve formulaci následujících lemmat.

Lemma 1 *Z axiomů A1–A15 lze dokázat následující formule:*

(a) $\neg(x < x)$	*(f)* $-(x + y) = (-x) + (-y)$
(b) $x + z = y + z \rightarrow x = y$	*(g)* $-(-x) = x$
(c) $x \cdot 0 = 0$	*(h)* $x < y \equiv -y < -x$
(d) $-0 = 0$	*(i)* $z \neq 0 \ \& \ x \cdot z = y \cdot z \rightarrow x = y$
(e) $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$	*(j)* $0 < 1$

Důkaz Axiom A11 lze použít na libovolnou dvojici čísel x a y, a to i v případě, kdy x a y jsou si rovny. Pokud pro nějaké x platí $x < x$, dle A11 platí i $\neg(x < x)$. To je spor. Tím je dokázáno (a).

Platí-li $x + z = y + z$, pak platí i $x + z + (-z) = y + z + (-z)$. Zbývá uvážit, že $z + (-z) = 0$ a užít A5. Podobně se dokáže i (h).

Nechť libovolné x je dáno. Z A8 a A5 plyne rovnost $x \cdot 0 + x \cdot 0 = 0 + x \cdot 0$. Tvrzení (b) dává $x \cdot 0 = 0$.

Číslo $-(x \cdot y)$ je ono jediné číslo, které sečteno s $x \cdot y$ dá nulu. Stačí tedy ověřit, že $x \cdot (-y)$ má tuto vlastnost, tj. že $x \cdot y + x \cdot (-y) = 0$. A to skutečně platí: $x \cdot y + x \cdot (-y) = x \cdot (y + (-y)) = x \cdot 0 = 0$, přičemž první rovnost platí díky A8, třetí díky (c). Tím je dokázáno (e). Podobně se dokáže i (d), (f) a (g).

Nechť x, y a z jsou dány a nechť $z \neq 0$. Z A12 víme, že platí $0 < z$ nebo $z < 0$. Proberme oba případy. Nechť $0 < z$. Z A14 plyne, že $x < y$ platí jen v případě, když $x \cdot z < y \cdot z$, a $y < x$ platí jen v případě, když $y \cdot z < x \cdot z$. Tedy platí-li $x + z = y + z$, platí i $x = y$. Nechť $z < 0$. Pak, dle (h), $0 < -z$. Dále lze postupovat analogicky jako výše. Když $x < y$, pak, dle A14, $x \cdot (-z) < y \cdot (-z)$. Dále (e) a (h) dávají $y \cdot z < x \cdot z$. Podobně když $y < x$, pak $x \cdot z < y \cdot z$. Oba případy jsou vyloučeny vzhledem k $x \cdot z = y \cdot z$. Neplatí tedy $x < y$ ani $y < x$. Podle A12 platí $x = y$. Tím je dokázáno (i).

Víme $0 \neq 1$. Neplatí-li $0 < 1$, pak, dle A12, platí $1 < 0$. Tvrzení (h) dává $0 < -1$. Užijme A14 na $z = -1$, $x = 1$, $y = 0$: máme $1 \cdot (-1) < 0 \cdot (-1)$. Dále (e), A6 a (c) dávají $-1 < 0$. To je, vzhledem k A11, spor s $0 < -1$. QED

Lemma 2 *Z axiomů A1–A15 lze dokázat formule:*

(a) $\neg\exists v(0 < v < 1)\ \&\ \neg\exists v(-1 < v < 0)$

(b) $\neg\exists x\exists y(0 < x \cdot y\ \&\ x \cdot y < x)$

(c) $x \cdot y = 1 \rightarrow (x = y = 1 \vee x = y = -1)$

Důkaz Předpokládejme, že v je takové, že $0 < v < 1$. Pak platí $v = 1 \cdot v + 0$ a také $v = 1 \cdot 0 + v$. To je spor s A15: dělení čísla v číslem 1 musí být jednoznačné. Platí-li $-1 < v < 0$, pak, dle (h) lemmatu 1, $0 < -v < 1$. To jsme již vyloučili.

Nechť $0 < x \cdot y$ a $x \cdot y < x$. Tedy $x \cdot y < x \cdot 1$. Nemůže platit $x = 0$, to by bylo i $x \cdot y = 0$. Tedy $0 < x$ nebo $x < 0$. Pokud $0 < x$, pak i $0 < y$. Z A14 plyne $y < 1$. To je spor s (a). Případ $x < 0$ je podobný.

Nechť $x \cdot y = 1$. Ani x ani y není nula. Pokud $x \neq 1$ a $x \neq -1$, pak, vzhledem k (a), platí $1 < x$ nebo $x < -1$. Případ $1 < x$ není možný vzhledem k (b). Když $x < -1$, pak $1 < -x$. To také není možné, protože $(-x) \cdot (-y) = 1$ podle (e) lemmatu 1. QED

Z lemmatu 1(h) plyne, že libovolné x je kladné, právě když $-x$ je záporné. Označme $|x|$ ono číslo z dvojice $\{x, -x\}$, které je nezáporné. Vzhledem k 1(d) je tato definice korektní i pro $x = 0$. Číslo $|x|$ je *absolutní hodnota* čísla x. Řekneme, že číslo x je *invertibilní* a píšeme $\mathrm{Inv}(x)$, jestliže $x \cdot y = 1$ pro nějaké číslo y. Podle 2(c) jedinými invertibilními čísly jsou 1 a -1. V následujícím textu ale tento fakt nebudeme potřebovat. *Dělitelnost* definujeme očekávaným způsobem: $x \mid y$, jestliže existuje v takové, že $x \cdot v = y$.

Lemma 3 *Z axiomů A1–A15 lze dokázat formule:*

(a) $\forall x\forall y(y \neq 0 \rightarrow \exists z\exists v(x = y \cdot z + v\ \&\ |v| < |y|))$

(b) $x \mid y\ \&\ y \mid z \rightarrow x \mid z$

(c) $1 \mid x\ \&\ x \mid 0$

(d) $0 \mid x \rightarrow x = 0$

(e) $z \mid x\ \&\ z \mid y \rightarrow z \mid (x + y)$

(f) $x \mid y \rightarrow x \cdot z \mid y \cdot z$

(g) $x \cdot z \mid y \cdot z \ \& \ z \neq 0 \rightarrow x \mid y$

(h) $x \mid y \ \& \ y \mid x \rightarrow \exists v(\mathrm{Inv}(v) \ \& \ y = x \cdot v)$

Důkaz Nechť je dáno x a nenulové y. Platí-li $0 < y$, pak tvrzení (a) plyne téměř bezprostředně z axiomu A15, protože platí-li $0 \leq v < y$, pak platí i $|v| < |y|$. Nechť $y < 0$. Pak $-y$ je kladné a díky A15 jím lze dělit číslo $-x$: $-x = (-y) \cdot z + v$, $0 \leq v < -y$. Podle 1 (f), (g) a (e) platí $x = y \cdot z + (-v)$. Dále $|-v| = v$ a $|y| = -y$. Tedy $|-v| = |y|$.

Tvrzení (b)–(g) ponecháváme za cvičení.

Nechť $x \mid y$ a $y \mid x$. To znamená, že existují u a v taková, že $x \cdot v = y$ a $y \cdot u = x$. Tedy $(x \cdot v) \cdot u = x$ a $x \cdot (v \cdot u) = x$. Pokud $x \neq 0$, pak $v \cdot u = 1$ díky 1(i). Tedy opravdu existuje invertibilní v takové, že $x \cdot v = y$. Pokud $x = 0$, pak z $x \mid y$ a 3(d) plyne $y = 0$. Pak ovšem $x \cdot 1 = y$, a tedy také existuje invertibilní v takové, že $x \cdot v = y$. QED

Domluvme se, že místo prvočíslo budeme v teorii celých čísel užívat termín nerozložitelné číslo, a o prvočíslech už mluvit nebudeme[1]. Řekneme, že číslo x je *nerozložitelné*, jestliže x není invertibilní a platí $\forall v(v \mid x \rightarrow v \mid 1 \vee x \mid v)$. Z 3(c) a (h) plyne, že nerozložitelné číslo x má dělitele pouze dvojího druhu: invertibilní, a pak takové, které vznikly z x vynásobením invertibilním číslem.

Zamysleme se nyní nad tímto tvrzením.

Tvrzení 2 (Bezoutova věta) *Pro libovolná čísla a, b existují čísla x a y taková, že číslo $a \cdot x + b \cdot y$ dělí jak a, tak b.*

Uvidíme, že podaří-li se nám dokázat tvrzení 2, snadno pak už dokážeme tvrzení 1. Stojíme tedy před úkolem dokázat tvrzení 2. Posuďme následující důkaz:

> Nechť čísla a a b jsou dána. Platí-li $a = b = 0$, lze x a y zvolit libovolně. Předpokládejme tedy, že alespoň jedno z čísel a a b je nenulové. Jistě existují nenulová čísla tvaru $a \cdot x + b \cdot y$: pokud například $a \neq 0$, lze volit $x = 1$ a $y = 0$. Označme t takové z čísel tvaru $a \cdot x + b \cdot y$, které má nejmenší absolutní hodnotu. Tvrdíme,

[1] Termín prvočíslo se totiž v algebře zpravidla používá pro čísla splňující podmínku $(*)$, a má tedy trochu jiný smysl než ve školské matematice.

že t je hledané. Ověříme $t \mid a$, podmínka $t \mid b$ se dokáže analogicky. Protože $t \neq 0$, lze užít 3(a) a dělit a číslem t se zbytkem: existují čísla z a v taková, že $a = t \cdot z + v$ a přitom $|v| < |t|$. Pokud $v = 0$, jsme hotovi, $t \mid a$. Případ $v \neq 0$ nemůže nastat. To by platilo $a = (a \cdot x + b \cdot y) \cdot z + v$ a také $v = a \cdot (1 + (-1) \cdot x \cdot z) + b \cdot (-(y \cdot z))$, a měli bychom spor s předpokladem, že t je číslo tvaru $a \cdot x + b \cdot y$ s nejmenší možnou absolutní hodnotou.

Pozorný čtenář pravděpodobně usoudil, že tento důkaz je zajímavý, ale zároveň si všiml, že v něm je použit nový předpoklad, nezahrnutý mezi A1–A15, totiž že mezi čísly tvaru $a \cdot x + b \cdot y$ existuje takové, které má z nich nejmenší absolutní hodnotu. Označíme-li $\psi(a, b, t)$ formuli $t \neq 0 \ \& \ \exists x \exists y (t = a \cdot x + b \cdot y)$, lze tento předpoklad zapsat formulí

$$\forall a \forall b (a \neq 0 \ \vee \ b \neq 0 \ \rightarrow \ \exists t (\psi(a, b, t) \ \& \ \forall v (\psi(a, b, v) \ \rightarrow \ |t| \leq |v|)))$$

nebo formulí

$$\forall a \forall b (\exists t \psi(a, b, t) \ \rightarrow \ \exists t (\psi(a, b, t) \ \& \ \forall v (\psi(a, b, v) \ \rightarrow \ |t| \leq |v|))).$$

Tento předpoklad skutečně nelze dokázat z axiomů A1–A15, a chceme-li mít teorii, ve které jsou proveditelné všechny běžné úvahy o celých číslech, musíme jej přijmou jako nový axiom.

Mysleme ale trochu dále. Nejen mezi čísly splňujícími vůči parametrům a a b podmínku ψ, ale i mezi čísly splňujícími vůči libovolným parametrům jakoukoliv jinou podmínku φ existuje takové, které z nich má nejmenší absolutní hodnotu. Definujme tedy *celočíselnou aritmetiku* IA (od anglického "integer arithmetic") jako teorii, jejíž jazyk má symboly $+$, $\cdot$, 0, 1, $<$, a která má axiomy A1–A15, a dále všechny formule tvaru

LNP: $\quad \forall \underline{y} (\exists x \varphi(x, \underline{y}) \ \rightarrow \ \exists x (\varphi(x, \underline{y}) \ \& \ \forall v (\varphi(v, \underline{y}) \ \rightarrow \ |x| \leq |v|))),$

kde $\underline{y}$ je zkratka pro $y_1, .., y_n$, ve formuli φ může být libovolný počet parametrů. Zkratka LNP pochází z anglického "least number principle", princip nejmenšího prvku. Teorie IA má tedy nekonečně mnoho axiomů: patnáct jednotlivých formulí a dále všechny formule, které připouští schema LNP.

Věta 1 *Tvrzení 1 i 2, tj. fakt, že každé nerozložitelné číslo splňuje podmínku* $(*)$, *a Bezoutovu větu, lze dokázat v teorii* IA.

Důkaz Bezoutovu větu jsme již dokázali. S jejím užitím se tvrzení 1 dokáže takto:

> Nechť p je nerozložitelné a nechť $p \mid a \cdot b$. Užijme Bezoutovu větu na dvojici p, a: existují čísla x a y taková, že číslo $t = p \cdot x + a \cdot y$ dělí p i a. Protože t dělí p a p má jen triviální dělitele, platí $p \mid t$ nebo t je invertibilní. Pokud $p \mid t$, pak také $p \mid a$ díky 3(b). Pokud t je invertibilní, pak $t \mid 1$, tj. $p \cdot x + a \cdot y \mid 1$. Díky 3(f) platí $p \cdot x \cdot b + a \cdot y \cdot b \mid b$. V součtu $p \cdot x \cdot b + a \cdot y \cdot b$ číslo p dělí oba sčítance. Podle 3 (e) a (b) platí $p \mid b$.

QED

1.3.3 Co dále?

Dospěli jsme k axiomatické teorii, ve které lze formulovat a dokázat řadu obecných faktů o celých číslech. Čtenář si to může vyzkoušet a pokusit se dokázat cokoliv, o čem ví, že o celých číslech platí, a co jsme nezahrnuli do žádného z našich lemmat.

V jazyce teorie IA máme symboly jen pro čísla 0 a 1, ale můžeme mluvit i o jakémkoliv jiném konkrétním čísle. V libovolné formuli se například může vyskytnout výraz $1+1+1$, díky němuž můžeme v teorii IA mluvit o vlastnostech čísla tři. Domluvme se, že výraz $1+1+1$ zapisujeme $\overline{3}$ a obecně výraz $1+1+\cdots+1$ obsahující n jedniček zkráceně zapisujeme $\overline{n}$. Výrazům tvaru $\overline{n}$ říkejme *numerály*. Díky numerálům můžeme v teorii IA formulovat a dokazovat vlastnosti libovolných konkrétních celých čísel. Jako cvičení doporučujeme čtenáři zamyslet se nad tím, jak se v teorii IA dokáže třeba formule $\overline{3} \cdot \overline{6} = \overline{18}$.

Označme $\beta(x)$ formuli $\forall a \forall b(x \mid a \cdot b \rightarrow x \mid a \vee x \mid b)$ a $\alpha(x)$ formuli číslo x je nerozložitelné. Víme, že je-li n nerozložitelné číslo, pak formuli $\beta(\overline{n})$ lze dokázat v teorii IA. Na začátku jsme to provedli pro $n = 2$, $n = 3$ a $n = 19$. Pokud n je rozložitelné, pak v IA lze dokázat formuli $\neg\alpha(\overline{n})$: například když $n = 18$, pak v IA lze dokázat (jak jsme se zmínili v předchozím odstavci), že $\overline{18} = \overline{3} \cdot \overline{6}$, a tedy uvnitř teorie IA je známo, že číslo $\overline{18}$ je rozložitelné. To znamená, že označíme-li $\psi(x)$ implikaci $\alpha(x) \rightarrow \beta(x)$, pak každá instance formule $\psi(x)$, tj. každá formule tvaru $\psi(\overline{n})$, je dokazatelná v IA.

Na začátku textu jsme naznačili znepokojivou možnost, že formuli $\forall x \psi(x)$ nelze dokázat, přestože lze dokázat všechny její instance $\psi(\overline{n})$.

Tato možnost ale nakonec nenastala: formuli $\forall x\psi(x)$ jsme v IA také dokázali. Takže, nestalo se nic vzrušujícího a vše dopadlo tak, jak by čtenář možná řekl na první pohled a bez logické analýzy důkazů.

Ale mohlo se stát! V roce 1931 dokázal Kurt Gödel slavnou První (Gödelovu) větu o neúplnosti, ze které plyne, že pro každou rozumnou teorii T existuje formule $\varphi(x)$, jejíž všechny instance $\varphi(\overline{n})$ jsou v T dokazatelné, ale formule $\forall x\varphi(x)$ v T dokazatelná není. V textu tohoto rozsahu nemůžeme Gödelovu větu dokázat ani nemůžeme podat konstrukci formule $\varphi(x)$. Můžeme ale naznačit, co se myslí "rozumnou" teorií. Jde o takovou teorii T, ke které (a) existuje algoritmus, který je schopen rozhodnout, co je a co není axiomem teorie T, a (b) ve které lze mluvit o přirozených nebo celých číslech a dokázat jejich jisté (přesně specifikované a velice jednoduché) vlastnosti. Teorie IA splňuje podmínku (b), a splňovala by ji i v případě, kdybychom neuvažovali schema LNP. Teorie IA splňuje i podmínku (a): schema LNP připouští všechny formule určitého tvaru, a o tom, zda daná formule má požadovaný tvar, lze rozhodnout algoritmem. Teorie IA tedy splňuje předpoklady První Gödelovy věty, a existuje tedy pro ni formule $\varphi(x)$ s výše zmíněnou vlastností, totiž že všechny její instance $\varphi(\overline{n})$ jsou dokazatelné, ale univerzální uzávěr $\forall x\varphi(x)$ dokazatelný není.

Máme-li takovou formuli $\varphi(x)$, nabízí se, abychom přijali formuli $\forall x\varphi(x)$ jako nový axiom a nadále pracovali v teorii, kterou lze označit $\mathsf{IA}+\forall x\varphi(x)$. Na Gödelově větě je ale zajímavé toto: přidáním jednoho axiomu k rozumné teorii vznikne opět rozumná teorie! Pro teorii $\mathsf{IA}+\forall x\varphi(x)$ tedy stále existuje formule (pochopitelně jiná než $\varphi(x)$), jejíž všechny instance lze, ale univerzální uzávěr nelze dokázat.

Je známo, že analogická situace se vyskytuje v teoretické informatice. Máme-li posloupnost funkcí f_0, f_1, f_2, $\ldots$, z nichž každá zobrazuje množinu všech přirozených (nebo celých) čísel do sebe, může se stát, že každá funkce f_i je algoritmicky počitatelná, ale "společná" funkce, která dvojici čísel n a x přiřadí číslo $f_n(x)$, algoritmicky počitatelná není. Pro každé n tedy existuje program P_n, který počítá funkci f_n, z nekonečně mnoha různých programů P_n ale nelze utvořit jeden program, který počítá funkci $[n, x] \mapsto f_n(x)$.

Na závěr se ještě naposled vraťme k tvrzení 1. Čtenář by se mohl otázat, proč jsme důkaz nepojednali následovně. Nechť $p \mid a \cdot b$. Číslo a má nějaký rozklad na prvočísla tvaru $q_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot q_n^{r_n}$, a číslo b má prvočíselný rozklad $q_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot q_n^{s_n}$ (připouštíme i nulové exponenty). Pak součin $a \cdot b$ má prvočíselný rozklad $q_1^{r_1+s_1} \cdot \ldots \cdot q_n^{r_n+s_n}$. Pokud $p \mid a \cdot b$, musí se v tomto rozkladu vyskytovat prvočíslo p s nenulovým exponentem: $p = q_i$ a $r_i + s_i \neq 0$. V tom případě ale jeden z exponentů r_i, s_i je nenulový, a tedy p se vyskytuje s nenulovým exponentem v rozkladu čísla a nebo v rozkladu čísla b.

Jsou dobré důvody, proč jsme takto nepostupovali. Předně, výše zmíněná úvaha o prvočíselných rozkladech *není* důkazem v teorii IA. Není totiž jasné, jak bychom v našem jazyce se symboly $+$, $\cdot$, 0, 1 a $<$ zapsali fakt, že každé číslo má nějaký prvočíselný rozklad. Můžeme zapsat formulí, že číslo a je součinem tří prvočísel, a můžeme zapsat (jinou) formulí, že je součinem sedmi prvočísel. Tvrzení, že každé číslo lze psát jako součin *nějakého* konečného počtu prvočísel, je ale vlastně nekonečnou disjunkcí (počet oněch prvočísel může být jedna, nebo dvě, nebo tři, nebo ...) a nemůžeme je tedy uznat za formuli.

Existuje ještě druhý důvod, proč nepracovat s prvočíselnými rozklady. Analýzou důkazů některých tvrzení, které postulují existenci nějakých objektů, lze často získat *algoritmus*, který sestrojí ony objekty. Například analýzou důkazu tvrzení 2 lze získat algoritmus, který pro každá dvě čísla a, b nalezne čísla x a y taková, že $a \cdot x + b \cdot y$ dělí a i b (jedná se vlastně o zobecnění Eukleidova algoritmu pro nalezení největšího společného dělitele). Lze dokonce ověřit, viz [1], že onen algoritmus je velice efektivní, tj. že zpracuje dosti rychle i obrovská čísla. A algoritmická efektivnost je okolnost, která mluví proti prvočíselným rozkladům. Není totiž znám žádný efektivní algoritmus pro nalezení prvočíselného rozkladu daného čísla. Rozložit velké číslo (takové, jehož zápis má desítky nebo stovky cifer), je tedy pravděpodobně prakticky nemožné, a to dokonce i v případě, kdy je známo, že ono velké číslo je součinem jen *dvou* prvočísel.

Literatura

[1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft, J. D. Ullman: *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Reading, Addison Wesley 1974

[2] P. Hájek, V. Švejdar: *Matematická logika*, připravováno

1.4 Jak učit logiku? (Minianketa) *Petr Jirků – Marcela Kýrová*

Na již tradiční mezinárodní konferenci LOGICA, která se koná každoročně v Liblicích u Mělníka, jsme několika předním odborníkům, kteří učí logiku studenty na různých typech vysokých škol, položili následující dvě otázky, abychom získali představu o jejich zkušenostech a případných problémech s výukou tohoto předmětu.

1) Je možné se logiku naučit? (Jestliže ano, co je minimální znalostí logiky?)
2) Může být logika (úspěšně) vyučována? (Jestliže ano, jaký druh činnosti je běžný na vaší univerzitě? Které metody, literaturu, software atd. používáte?)

Zde jsou jejich odpovědi:

Reinhard A. Muskens, Tilburg

Není překvapující, že logické pozadí myšlení lidí je chudé, ale to co nás znepokojuje je, že toto je často skutečností i v akademických kruzích: chybné přijímací testy, nesprávné formulace právních a normativních pravidel, irelevantní argumentace, neschopnost vysvětlit správně svoje vlastní myšlenky atd.

Některé z těchto potíží mají hodně co do činění s logickými schopnostmi lidí, jiné nikoli. Například schopnost vysvětlit správně své myšlenky souvisí s logikou, ale ještě více se všeobecnými jazykovými schopnostmi člověka. Ale bylo by dobré, kdyby více lidí vědělo více o logice a mohlo by spojit tyto znalosti s jejich každodenním uvažováním. Není nic platné, když člověk ví jak dělat sémantické tabulky, ale neaplikuje představy o platnosti a konzistenci v jeho každodenním (nebo akademickém) uvažování. Vím, že mnohé univerzity v anglosaských zemích požadují, aby všichni studenti chodili na všeobecné kurzy logiky. Někdy je to "rozředěno" do jakéhosi druhu "neformální logiky". Preferoval bych kurz, který učí elementy reálné věci, ale spojuje je se způsobem úvahy, která bude požadována od akademiků.
Ad 1) Neexistuje žádné všeobecné minimum. Myslím, že každý by

měl přijít do kontaktu s nějakými základními myšlenkami o platnosti a konzistenci a každý by měl být schopen rozeznat bezcenné argumenty (z téhož důvodu, proč by každý měl umět počítat: jestliže neumíš, budeš podveden), ale minimální stupeň znalosti logiky by měl být vyšší pro filosofy a lingvisty a ještě vyšší pro studenty matematiky a informatiky (ve smyslu *computer science*).

Pracuji na katedře jazyků a lingvistiky. Používáme jednoduchý text od Elias Thijsse a Harry Bunta jako první všeobecné uvedení (povinné pro všechny studenty). Ti studenti, kteří si vyberou komputační lingvistiku, jsou podrobeni Barwiseově & Etchemendyho učebnici "The Language of First-Order Logic" (s Tarski's World - to bude vystřídáno systémem Hyperproof, nyní je tento program již k dostání ve Windows). Studenti si také mohou vybrat vhodnější kurzy. Existuje kurz, např. o modální logice, který se učí podle Goldblattovy publikace "Logics for Time and Computation".

Vím, že Asociace pro symbolickou logiku učila o těchto problémech a vypracovala seznam doporučení, který, myslím, byl velmi dobrý.

Mark Sainsbury, King's College, London

Ad 1) Zjistil jsem, že vztahy mezi elementární formální logikou a všeobecnými dobrými rozumovými dovednostmi nejsou zas tak strašně těsné. Myslím, že lidé se učí pozdějším procesem stálého kriticizmu a správnosti (korektnosti) usuzování.

Ad 2) Povzbuzuji svoje kolegy, aby používali software k učení rutinní části elementární formální logiky. Ačkoliv považuji toto studium za podstatné pro studenty filozofie, nepovažuji to za významný předpoklad rozvoje dobrých rozumových dovedností. Tím je spíše nějaké jejich použití. Ale myslím, že člověk může vymyslet způsob v neformálním myšlení (mnoho příkladů, výstřižky z novin), který by byl více použitelný.

Mám zde nějaké kolegy v pedagogickém oddělení, kteří zkusili něco podobného s malými dětmi (8 nebo 9-ti letými, myslím) a zjistili při použití mnoha dat, že jejich výkon se v ostatních předmětech vylepšil po té, co se setkali s něčím, co je možno nazvat filozofií (ačkoliv nejsou filozofové). Neviděl jsem detaily a tak nevím, zda vypracovali "speciální zacházení".

Andre Fuhrmann, Konstanz

Ad 1) Rozlišuji mezi (1) logikou jako teorií argumentace a (2) logikou jako matematickou nebo filozofickou logikou.

Obojí se dá naučit, ale velmi rozličnými způsoby. Většina z nás se učí (1) cvičením bez kurzů. Nezdá se to být čisté spojení mezi (1) a (2). Můžete být výborní v (1) bez znalostí (2). A můžete být velmi dobří ve (2) a nedostateční v (1) v jednotlivých případech. Nicméně hodně lidí dobrých ve (2) je dobrých také v poznání klamných závěrů na první pohled a tudíž jsou dobří v (1).

Ad 2) Opět oba způsoby logiky se dají učit, ale velmi odlišnými způsoby. Pro logiku ve druhém smyslu používám svoje vlastní poznámky z přednášek. Ale existuje pár knih, které mám obzvlášť rád. Jsou to:

Chellas Brian, *Modal Logic*
Friedrichsdorf, *Einführung in die klassische und intensional logic*
Lyndon Roger C., *Notes on Logic*
Makinson David, *Topics in Modern Logic*
Mendelson, *Mathematical Logic*
Schoening, *Logik für Mathematiker*
Smullyan Raymund, *Forever Undecided*

Učím logiku pro filozofy. Můj cíl je dvojí. Za prvé, rád bych předal studentům ideu rigorozního myšlení. Za druhé, bych je rád vybavil nějakým klíčem myšlenkovým, se kterým se pravděpodobně setkají, když dělají filozofii. Nacházím příklad a ještě bezpečnější dril (v přirozené dedukci nebo dalších formalizacích) většinou zbytečný pro filozofy. Místo toho by se moji studenti měli učit pojmy: axiomatický systém, indukce, sémantická (modelová) interpretace, intenzionalita versus extenzionalita, nutnost, konsekvence, omezující podmínky atd. Nepoužíváme software. Cítím se trochu vinen, že jsem příliš líný podívat se na tuto věc. Kdybych používal software jako pomoc při učení, můj první výběr by byl Barwiseův "Tarski's World".

Albert Newen, Bonn

V Liblicích jsem s vámi krátce hovořil o logickém software. Existuje pouze jeden software, který znám, a ten je k dostání spolu s knihou v CSLI vydání, Stanford. Barwise/Etchemendy: The Language of First

Order Logic, 3rd edition, CSLI Stanford 1992, price USD 34,95.

Pokud máte více informací o logickém software, informujte mne, prosím.

Ivan M. Havel, Praha

Ad 1) Je možné se logiku naučit?

Ano, dá se naučit a učit, ale ne zas tak příliš teorií, jako dlouhými zkušenostmi s texty nebo rozhovory, které jsou přesně, možná víc než je nutné, formulovány s čistou logickou strukturou. Může to být matematický text právě tak, jako paradoxy nebo hádanky. Zkušenosti s logicky nejasnými, nesrovnatelnými a bezvýznamnými texty mohou být také užitečné, pokud jsou za takové uznány.

(Jestliže ano, co je minimální znalostí logiky?) Znalosti logiky by měly být důsledkem, nikoliv předpokladem.

Ad 2) Může být logika (úspěšně) vyučována? Viz. výše.

Luc Bovens, Boulder, Belgie

K vašim otázkám - dovolte mi začít tou druhou. Používám knihy Barwise a Etchemendiho a software k učení logiky prvního řádu. "Jazyk logiky prvního řádu" je velice pěkný k učení jazyka a ukazuje velmi přístupný systém. "Hyperproof" obsahuje vynikající program pro kontrolu správnosti důkazů. Předchozí kniha je pro PC a Mac, ta pozdější pouze pro Mac, ačkoliv verze PC se připravuje. Doplňuji tento materiál anglickými argumenty z Pospesel, H. and Marans, D.:*Arguments - Deductive Logic Exercises*, které obsahují vynikající argumenty ze skutečného života.

Moji kolegové používají Mates, B. "Symbolic Logic" a Teller, P. – název mi unikl.

Myslím, že beru logiku trochu jako studium hudby: každý může něco zlepšit, když dostane pořádné instrukce, ale jak moc práce je zapotřebí a jak moc času potřebujete investovat, je široce vymezeno vlastními kapacitami, sociálním pozadím atd.

Michael Resnik, Chapel Hill, USA

Ad 1) Jestliže termínem "logika" myslíte disciplínu zvanou formální logika, pak odpověď je jasně "ano". My logiku učíme studenty pořád a mnoho z nich se ji, zdá se, naučí velmi dobře.

Jestliže "logikou" myslíte něco jako "jasné a správné myšlení nebo usuzování", pak je mi méně jasné, zda se to studenti v našich kurzech naučí. Myslím si však, že to je "dovednost", která se zlepšuje s praxí a že kurzy logiky jsou jednou z cest, jak využít a zlepšit tyto dovednosti. Podezřívám, že samotné dovednosti se učíme tehdy, kdy se dítě učí jazyku a dalším dovednostem významným pro interakci s vnějším prostředím.
Ad 2) Zde nemám žádnou zkušenost.

Kapitola 2

Logika a argumentace

2.1 Karl R. Popper “Logika jako organon kritiky” *Vojtěch Kolman*

V souvislosti s aplikacemi výsledků formálních věd často vyvstávají otázky po oprávnění a mezích takového počínání. Obrovský prospěch, který přírodovědě vyplynul z použití matematiky, nás nenechává na pochybách, že je toto použití možné, zároveň jsme však často svědky toho, jak je v empirických a zvláště pak společenskovědních disciplínách s aparátem deduktivních věd zacházeno nesprávně, ba vysloveně nekorektně. To nás zcela přirozeně dovádí k potřebě obecnějších zkoumání povahy samotné vědy. Podobně jako Kant nepochybujeme o tom, že věda existuje (omezíme se pro jistotu jen na matematiku, logiku a přírodní vědy), chceme-li si ovšem ohledně mezí jejího použití učinit jasno, musíme si stejně jako Kant znovu položit otázku, jak jsou tyto vědy možné - čím je garantována platnost jejich tvrzení. V centru našeho zájmu tak stojí otázky vztahu mezi našimi teoriemi a skutečností, resp. námi jakožto médii celé diskuse, tedy obecné otázky poznání.

Karl Popper, zdá se, nabízí po pádu Kantovy epistemologie nejucelenější řešení výše zmíněných problémů, převratné a *průzračné* zároveň. Je cílem této práce předestřít jakési popperovské resumé k výše (velmi hrubě) načrtnuté problematice. Zvláštní pozornost by navíc měla být věnována logice resp. úloze, které se jí v Popperově výkladu lidského poznání dostává.

Poznámka: Z důvodů přehlednosti a shrnující povahy textu nebylo možné provádět důslednou citaci z Popperových textů a nezbývalo než se uchýlit k leckdy zkratkovitému výkladu, i tak pomíjejícímu jiná relevantní místa z pera tohoto nad jiné důkladného a pečlivého autora; snažil jsem škody případné desinterpretace zmírnit průběžným uváděním rámcových odkazů.

Hume. David Hume vyrušil Kanta dle jeho vlastních slov z “dogmatického spánku”. Zpochybnil totiž princip metafyzikům nejmilejší - *kauzalitu* - “věčnou pravdu, vyvýšenou nad bohy a osud”[1], jak o ní hovoří Schopenhauer. Jeho formulaci zákona kauzality (K) použijeme pro další postup: Jestliže se jedno nebo více těles ocitne v novém stavu, musí tomuto stavu předcházet jiný, po němž tento nový následuje, a to pravidelně, tj. kdykoli nastane onen první. První stav se nazývá příčina, po něm následující účinek.[2]

Upřesnění: Obvykle se předpokládá, že zákon kauzality tvrdí: (1) existují zákonitosti, (2) každá změna je předpověditelná dedukcí z přírodních zákonů. (1) sice z (K) přímo nevyplývá, ale je vázána na nepříliš zpochybňovanou větu o existenci změn. Hledání zákonitostí je ostatně podmínkou v pozadí jakékoli aktivity cílené k poznání. (2) lze považovat za přímý důsledek (K), neboť spojení příčiny a účinku je vždy jednoznačné a lze jej formulovat v příslušné obecné větě - zákonu: kdykoli příčina A, pak vždy účinek B.

Humovo zpochybnění zákona kauzality spočívá na jeho zkoumání pojmu spojení příčiny a účinku. Hume se táže, na čem toto spojení, umožňující nám jako jediné postoupit za evidenci smyslů, zakládá svou autoritu. Racionalistická metafyzika se jej pokouší vydávat za výtvor čistého rozumu, a tedy něco platného nutně. V žádné z obvykle udávaných příčin však její účinek obsažen nutně[3] není - kupř. to, že svit Slunce zahřívá kámen, je nahodilou vlastností tohoto světa, a v daném spojení se nic nutného neskrývá. Z častého spoluvýskytu dvou jevů (svit Slunce, zahřátí kamene) nijak nevyplývá příslušný obecný zákon - zdá se, že neexistuje žádný (logicky) platný rozumový argument, “střední člen”, který by

[1] Viz. [U, §12].
[2] Viz. [U, §20].
[3] Tedy z případného upření účinku jeho příčině nevyplývá (pouhou analýzou daných pojmů) spor; slovem “nutné” tedy dále rozumíme jen to, čehož popření nevede k logickému sporu.

umožnil přechod z pozorovaného na nepozorované, od singulárních tvrzení (pozorování) k obecné větě (zákonu). Přesto však, uvažuje Hume, všichni rozumní lidé tímto způsobem z dobrých důvodů postupují, tj. vyvozují ze zkušenosti obecné závěry. Jak si tuto paradoxní skutečnost vysvětlit? Jejich usuzování totiž, soudí Hume, není podepřeno žádným rozumovým argumentem, ale zvykem, založeným na opakování a asociaci idejí. "Všechny závěry ze zkušenosti jsou tedy následkem zvyku, nikoli rozumové úvahy."[4] Důsledky Humova zkoumání jsou dosti tristní; cituji z Poppera: "Jeho výsledek, že opakování nemá nejmenší logickou sílu, přesto však ovládá náš duchovní život a naši schopnost rozumět, ho přivedl k závěru, že logika a rozum v něm hrají pramalou roli. Naše 'poznání' bylo odkryto jako víra, dokonce jako víra rozumem neobhajitelná - víra iracionální." [OE,1,3] Hume, jeden z nejracionálnějších mužů své doby, byl svou důsledností doveden k naprosté skepsi ohledně síly rozumu: "Rozum je otrokem vášní; a má jím být a zůstat. Nikdy si nemůže nárokovat jinou úlohu než službu a poslušnost vášním."[5] (Podobně dopadne i Schopenhauer, když ho tentýž zákon kauzality přivede k determinismu).

Indukce. Humovu problematizaci pojmů příčiny a účinku pochopil Kant jako otázku epistemologického statu zákona kauzality, a označil ji "Humův problém".[6] Popper upozornil na to, že Humovo zpochybnění kauzality kromě psychologistické teorie zvyku obsahuje "epistemologický klenot" - jednoduchý argument proti platnosti *principu indukce* (IP), totiž věty, která dovoluje převést induktivní úsudky, tj. úsudky z jednotlivého (pozorovaného) na obecné (zákony), do přijatelné logické formy.[7] Vedle problému kauzality nastoluje tak Hume navíc problém indukce: otázku oprávněnosti induktivních úsudků. Je jasné, že nalezením příslušného (IP) by byl problém indukce pozitivně vyřešen. [OE,2,26], [LdF,I,1]

Humovo odmítnutí (IP) částečně kopíruje následující úvaha: Jak již bylo zmíněno, (IP) nemůže být tvrzení analytické, a přijmeme-li, že je výrokem empirickým, nevyhneme se otázkou po jeho odvození z pozorovacích vět zavedení principu indukce vyššího řádu. U něj budeme otázku

[4] Viz. [En,V,1]
[5] Viz. [T,II,III,III]
[6] Viz. předmluva k [P].
[7] Oba principy spolu ostatně úzce souvisí: (K) lze vykládat jako zesílený (IP), a tak jej také používá Kant.

opakovat, a nevyhnutelně se tak dostaneme do nekonečného regresu, kdy platnost principu řádu n závisí na platnosti principu řádu $n + 1$. Tentýž argument bude platit i tehdy, pokusíme-li se odsunout problém tím, že zákonu přiřkneme pouze pravděpodobnostní platnost. Humův závěr tedy zní: indukce je nepravdivá, neboť vede k nekonečnému regresu.[8]

Podle Poppera předkládá Hume v souvislosti s indukcí vlastně problémy dva, staví je do určitého protikladu a tím vzniká již zmíněné dilema, kdy se jedinou racionalistovou možností zdá být iracionalistická teorie poznání. První problém (1) je *logický*: jsme oprávněni usuzovat z jednotlivých případů, které jsme zakusili, na případy jiné, nezakušené?; druhý (2) je *psychologický*: proč přesto všichni rozumní lidé očekávají a věří, že nastávající zkušenosti budou podobné těm prožitým?. Nyní již může vzniknout dilema, neboť: (1) je vlastně otázka po platnosti induktivních úsudků a Hume na ni právem odpovídá záporně; jelikož ale vyznává induktivistickou teorii poznání mechanismem opakování a zesílených asociací, odpoví v jejím duchu na otázku (2) a je tak nutně doveden ke skepsi ohledně síly rozumu, neboť ten nemá na našem usuzování (ze zkušenosti) žádnou účast. Vlivným pokusem o nápravu tohoto Humovou filosofií zapříčiněného "bankrotu rozumu" (Russell), je Kantova *Kritika čistého rozumu.* [OE,1,2-3]

Kant. Humova argumentace na Kanta hluboce zapůsobila. Jejím důsledkem je totiž nemožnost vědy o přírodě; o té však Kant nikdy nepochyboval. Objevení planety Neptun na základě Newtonových *Principií* na něj, stejně jako na celý učený svět, učinilo neobyčejně silný dojem; zdálo se, že bylo konečně dosaženo pevného bodu, dokazatelného poznání světa. [GE,E78] Kantův pokus řešení "Humova problému" je nutné uvážit právě v tomto kontextu. Jak upozorňuje Popper, zásadní je, že pro Kanta není ani tak důležitý princip kauzality (K), jak se sám domníval, ale způsob, jak ho používá - totiž jako princip indukce (IP).[9] [OE,2,26]

Kantovo řešení je vskutku důvtipně založeno na nauce o *apriorních soudech.* Podle Kanta čistý rozum nelze redukovat pouze na soudy ana-

[8] Viz. [T,I,III,IV a VI]

[9] V poznámce z [P,§20] Kant píše: "... uvažme následující: Svítí-li Slunce na kámen, kámen se zahřívá. Tento soud je pouhý soud vjemový a není v něm obsažena žádná nutnost, ať jsem to vnímal já či jiní sebečastěji; vjemy jsme takto pouze často shledávali pospolu. Řeknu-li ale: Slunce zahřívá kámen, přistupuje k vnímání ještě rozvažovací pojem příčiny, který pojem slunečního svitu spojuje s pojmem tepla nutně, a tento syntetický soud se stává nutně obecně platným, tedy objektivním a mění se z vjemu na zkušenost."

lytické. Apriorní soudy mohou být i obsažné - syntetické. Takovými jsou mu např. věty matematiky. Ty mají totiž spočívat na čistých názorech prostoru a času, které předcházejí jakékoli zkušenosti. S přírodními zákony se to má analogicky. Je to lidský rozum, který vynalezl zákony a předepsal je smysly vnímanému bahnu; teprve skrze ně stvořil řád přírody. Newtonova teorie nebyla empiricky vyčtena z přírody prostřednictvím našich smyslů, ale je čistým výtvorem našeho rozumu. Kant přímo říká: "Rozum nečerpá své (apriorní) zákony z přírody, nýbrž jí je předepisuje."[10] Zákony přírody jsou tedy platné (a jisté) proto, že jsou zadány naším rozumem, že právě jejich prostřednictvím strukturujeme svět (jevů); nemohou s ním být tedy v rozporu. Platnost principu indukce (v podobě zákona kauzality) je tak - přiznáním apriornosti syntetickým větám - zakotvena v říši čistého rozumu. Tím je (mimo jiné) vyřešeno Humovo dilema. [OE,2,28]

Kantova teorie má i několik dalších předností: (1) Okamžitě umožňuje vysvětlit aplikovatelnost našich teorií na skutečnost. Zvláště cenné je to v případě matematiky, která je svým založením na čistých názorech prostoru a času dokonce první na řadě. Kant tak podobně jako Platón řeší otázku použitelnosti matematiky tím, že ji předsouvá našim smyslům. Tím se stává spolutvůrcem jednoho z významných směrů filosofie matematiky. (2) Zdůrazňuje naši aktivitu v poznávacím procesu. Jsme to my, kdo přírodě předepisuje zákony, my, kdo strukturuje náš svět určitým způsobem (odpovídajícím naší apriorní výbavě) - příroda neodpovídá, není-li tázána.

Přesto všechno musíme kantovský apriorismus coby řešení problému indukce (resp. založení přírodních zákonů) zavrhnout. Kant byl ke svému řešení doveden pevnou vírou ve správnost Newtonovy fyziky. Poté, co byla Newtonova teorie zpochybněna Einsteinem, je předpoklad její apriorní platnosti těžko udržitelný; jedná se (nejspíš) jen o smělou hypotézu. Vezmeme-li navíc v úvahu objev neeuklidovských geometrií a teorii relativity, znamenající konec výlučnosti klasických představ o prostoru a čase (jež jsou úhelnými kameny Kantovy teorie syntetických vět apriori), musíme jednoduše považovat apriorismus, alespoň v podobě předložené Kantem, za překonanou, i když neobyčejně důvtipnou myšlenku.

Zavrhnutím Kantova apriorismu se dostáváme zpátky k Humovu dilematu a problému indukce. Ptáme se: Existuje princip, v souladu s rozumem, který by umožňoval úsudky z jednotlivého (pozorovaného) na obecné (zákony)? Otázka může být také formulována takto: Existuje in-

[10] Viz. [P,§36]

duktivní logika? Podobně jako Hume, odpovídá i Popper na tuto otázku záporně. Neobyčejná šíře a nosnost jeho odpovědi, jejímž důsledkem je také odstranění dilematu, si však nejprve vyžaduje explikaci termínů "logika" a "platnost".

Logika. V dětství jsme se naučili hovořit a používat naši řeč k popisu skutečnosti. Postupně jsme si osvojili schopnost *argumentace*; Popper říká: naučili jsme se způsobu, jak z dané informace získat informaci sekundární, explicitně nevyjádřenou. [VW,I,9,V] Tím jsme dosáhli velmi cenného prostředku poznání, obdařeného výraznými specifiky. Způsob, jakým při správné argumentaci postupujeme, lze do jisté míry zachytit skrze určitá úsudková pravidla. Právě jejich formulaci a diskusi lze označit za hlavní úkol logiky.

Předmětem logiky ovšem není usuzování či argumentace v celé šíři jejich možného významu. Nezajímá nás (v první řadě), jak moc se úsudky Egypťanů lišily od našich či zda lze více lidí nadchnout tím či oním argumentem. Naše tázání se neorientuje na fakta, ale na platnost. Totéž se týká i obecné nauky o poznání (vědosloví, epistemologie, logika vědeckého bádání), kterou je takto podobně jako logiku nutné ostře odlišit od psychologie. Mnoho nedorozumění ohledně výsledků epistemologie a logiky zapříčiňuje očekávání, že tyto vědy nabídnou praktické postupy a nástroje pro bádání; když se pak zjistí, že jejich přímá relevance ke světu zkušenosti je pramalá, přichází zklamání a obvinění ze sterility či nepravdy. Omyl byl ale obsažen v předpokladu: - logika není technika, nezabývá se konkrétními postupy, ale podmínkami; kdo od ní očekával víc, než sama slibovala, by si měl nejprve vyjasnit pojmy. V dějinách se často setkáváme s pokusy učinit logiku obsažnější - stačí jen vzpomenout Hegela, kterému se svou logikou - slovy lorda Russella - podařilo demonstrovat závažnou pravdu, že čím horší je vaše logika, tím zajímavější jsou důsledky, které z ní plynou.

Úsudkové pravidlo nazveme platným tehdy a jen tehdy, vede-li z pravdivých premis vždy k pravdivému závěru. Podmínku přenosu pravdivosti z premis na závěr spolu s podmínkou požadující pro nepravdivý závěr existenci nepravdivé premisy (důsledek podmínky první) budeme považovat za dva základní zákony teorie *dedukce* (Popper: "zákon transmise pravdy" a "zákon retransmise nepravdy"). [A,32]

Konkrétní odvození nepravdivého tvrzení z pravdivých premis podle daného úsudkového pravidla nazveme protipříkladem k tomuto pravidlu. Nyní můžeme také říci: úsudkové pravidlo je platné tehdy a jen tehdy, neexistuje-li k němu žádný protipříklad, tedy uvedení konkrétního úsudku v souladu s pravidlem, kdy je z pravdivých premis odvozen nepravdivý závěr. Zásadní je, že platnost či neplatnost určitého úsudkového pravidla závisí jen a pouze na existenci či neexistenci protipříkladu, která je zcela objektivní, tj. nezávislá na našich domněnkách, představách či pocitech. Odtud tedy neslučitelnost logiky s psychologií. Neplatnost indukce je právě objektivním důsledkem existence protipříkladu.

Zatím jsme věcně nepokročili dál než Hume. Ten došel v logické části svého problému ke stejnému závěru, tedy k logické neudržitelnosti indukce. Dilema vyvstalo z toho, že Hume přesto v indukci věřil, jinými slovy - nedovedl si představit jiný způsob poznávání světa, než induktivní (viz. Humův psychologický problém). Popperovo komplexní řešení problému indukce rozdělíme na dvě části. Nejprve uvedeme důvody a pozadí kořenů fixace Západu na indukci. V druhé části pak naznačíme, jak lze indukci elegantně a podnětně nahradit v oblastech, v nichž jí uhrančivost důvodů, jež byly explikovány v části první, přinesla skoro ráz dogmatu a leckdy i jediný argument pro její platnost.

Aristotelés. Platná deduktivní odvození jsou pro nás cenným prostředkem poznání světa - poznání logického. Cena za jeho "spolehlivost" (garantovaná výše zmíněnou objektivitou logické platnosti) je jeho nepřímý, podmíněný vztah ke světu. Ten nám dovoluje vytvářet úsudky o světě pouze za předpokladu předem dané platné informace - z určitého hlediska se tedy jedná o poznání značně triviální, bezobsažné. (Jak poznamenal kdysi Kierkegaard na Hegelovu adresu: Logika se nikdy nemůže sama vybavit premisami.)

Může ale existovat podobně spolehlivé poznání, které by se týkalo našeho světa přímo? Můžeme mít o světě jisté (dokazatelné) vědění? Dere se z nás souhlasný výkřik, neboť něco o světě přece víme, a víme-li něco, víme to přece jistě. Aristotelés, který teorii dedukce založil, si byl problému dokazatelnosti vědom. Kdyby bylo vědění dokazatelné, pak musí nutně dojít k nekonečnému regresu, neboť každý důkaz se sestává z premis a závěru, a nejsou-li dokázány premisy, není ani závěr. Aristotelés ovšem, a po něm tisíce filosofů, věřil, že ví. Ocitl se tedy před problémem, jak rozšířit prostředky dokazatelnosti tak, aby umožnily nárůst informace směrem od premis k závěru - jak založit teorii indukce. Řešení našel ve své nauce o *podstatách*: v každé věci sídlí esence, úplný souhrn "informací" o její povaze; prostřednictvím nazírání těchto podstat lze vytvořit "první premisy", základ všech důkazů - a to je právě funkcí indukce (epagoge), přechodu od příkladů k nazření podstaty a "důkazu" příslušné definice. Aristotelés si byl problematičnosti povahy takovéhoto důkazu vědom; jeho touha po jistém vědění však byla zřejmě silnější. Dokonce tak silná, že byl ochoten připustit evidentní psychologismus. [LdF,NA,XIX*,VI a VII], [OS,11,I] Touha po dokazatelném vědění se po Aristotelovi line celou západní tradicí: stejně končí např. Husserlova fenomenologie, která má nazírání podstat přímo v popisu práce, ale i Schlickův pozitivismus, ustanovující jako své nezpochybnitelné východisko pozorovací věty, z nichž se pak snaží dosáhnout (rovněž nezpochybnitelných) zákonů přírody. Carnapovo neustálé budování induktivní logiky nás tedy sotva již překvapí - jak jinak se od oněch absolutně jistých protokolárních vět k oněm absolutně jistým obecným dostat.

Jistota. Společné všem výše zmíněným pokusům je přesvědčení, že cílem našeho poznání, naší vědy, má být jistota - věda je cílená na jistotu a zároveň ji svým větám garantuje. Tento trend se ostatně dávno dostal do obecného povědomí - stačí si povšimnout, jak oblíbeným zaklínadlem (kupř. v médiích) se stalo tvrzení, že věda něco dokázala ("z lidského genomu budeme schopni předpovídat zdravotní stav jedince s pravděpodobností hraničící s jistotou" apod.).

Pocit jistoty a pocity obecně však nejsou dobrými rádci. Stačí vzpomenout Newtonovy zákony, na jejichž pravdivost byly ochotny přísahat generace vědců. Jistotou (něčím subjektivním) nelze zakládat platnost (něco objektivního).[11] Evidence, bezprostřednost apod. nemají objektivní zakotvení. Odvoláme-li se na Poppera: důvod, proč často považujeme nějakou teorii za "bezprostředně evidentní", je pouze fakt, že se náš duševní aparát dobře adaptoval na její úroveň obtížnosti. Z toho ovšem nikterak nevyplývá její pravdivost; ta je na našem přesvědčení zcela nezávislá. [OE,2,16]

Rozumíme-li tedy poznáním světa kumulování nepochybných tvrzení, vězme, že toho nejsme schopni. Nemáme moc, která by z nás učinila garanty pravdivosti našich hypotéz. To, že jsme si některými z nich jisti, je náš osobní problém, čistě individuální záležitost, bez jakéhokoli nároku na platnost. Jsem si jist, že na mé ruce je právě pět prstů; kdyby však od tohoto faktu mělo záviset něco důležitého, třeba život přítele, ihned bych je, třeba i několikrát, pečlivě přepočítal. [OE,2,22]

Pravda. Tvrdíme: Cílem vědy nesmí být jistota, ale pravda; nebo přesněji - pravdivé, tj. faktům odpovídající, řešení našich aktuálních pro-

[11] Platnost nějaké věty je jednomístný predikát, její přesvědčivost přinejmenším dvojmístný - musíme uvést subjekt, pro něhož je přesvědčivá.

blémů. Vzhledem k problematičnosti pojmu pravdy může nastat dojem, že jsme touto tezí nepokročili ani o píď, ba že tím byla celá diskuse svedena na úplné scestí. Není snad pravda opět jenom záležitostí individuální jistoty, inspirací básníků, mazaným podvrhem stávající vědecké kasty či záležitostí víry? Pojem pravdy se ostatně soustředěným úsilím placených filosofů, sociologizujících nedovzdělanců a okázalého blábolení náboženských vůdců dávno stal jedním z nejméně důvěryhodných konceptů pro odbornou diskusi. Podložení jakékoli aktivity vědomě cílené k poznání si bez něj lze ovšem sotva představit. Tvrdím-li, že se něco má tak a tak, pak nárokuji pravdivost větě, v níž je tvrzená skutečnost formulována.

Popper často zdůrazňuje, že zásadním krokem při utváření lidské řeči byl objev popisných vět. Tím se k nižším funkcím lidské řeči, které sdílíme se zvířaty (vyjadřování a komunikace), přidává i funkce vyšší - *deskripce*. Její vznik podstatně souvisí s naší schopností lhát - říkat věty, které nejsou ve shodě se skutečností - nejsou pravdivé. [S,1,VIII a IX] Základní a přirozený koncept pravdivosti je tedy shoda (věty) se skutečností. Tato poměrně hojně zastávaná tzv. korespondenční teorie pravdy (Aristotelés, Akvinský, Kant) se stala na přelomu století předmětem pochybností. Poslední rána přišla ze strany tzv. sémantických paradoxů.[12] Proto se nelze divit, že Tarského definice pravdy, která se zmíněným paradoxům dokázal vyhnout a přitom navázat na klasický koncept shody, byla nadšeně přivítána a dokonce označena (právě Popperem) za jeden z největších filosofických výkonů matematické logiky. Tarski se stal zachráncem racionálního pojmu pravdy.

Tarski. Své slavné řešení definovatelnosti pravdy odvíjí Tarski od pozorování, že pravda je sémantický pojem, tedy pojem mající co do činění se vztahem výrazů jazyka k označovanému. "Pravdivý" znamená toliko co "v souladu se skutečností". Příčinou známých paradoxů, a tedy i ztroskotání pokusů o precisnější pojem pravdy, je přehlédnutá relativní povaha sémantických pojmů. Jazyk, o kterém hovoříme, se nemusí

[12] Je třeba zmínit, že odpůrci korespondenční teorie pravdy se nerekrutovali pouze ze stran iracionalistů. Čelné osobnosti logiky, mezi nimi i Gottlob Frege, ho např. kritizovali z přesvědčení, že pravdu nelze pro její elementárnost vůbec definovat. Tvrzení korespondenční teorie, že pravda je souhlas se skutečností, by podle něho v konkrétní aplikaci ověřování toho, zda tomu tak je, předpokládalo samo sebe. Další vývoj však ukázal, že podobná definice je nejen možná, ale v jistém smyslu pro další rozvoj logiky (v souvislosti s jejím ústředním pojmem "vyplývání") dokonce nutná.

krýt s jazykem, ve kterém hovoříme. Univerzální jazyk, který obsahuje vlastní sémantiku a v němž platí navíc obvyklé zákony logiky, se stává nutně sporným. Definici pravdy je tak nutné relativizovat vůči určitému jazyku.

Omezme se dále na formální jazyky (uměle zkonstruované, ovšem interpretované) s konečným počtem proměnných. Výchozí jazyk, pro nějž má být definice pravdy zformulována, nazveme jazykem objektovým. Dále: Chceme-li budovat teorii, která se má zabývat vztahem mezi skutečností a větami, musíme v ní umět hovořit o větách a o skutečnosti. Za tímto účelem zkonstruujeme k danému objektovému jazyku tzv. metajazyk, na jehož půdě bude sémantika objektového jazyka pěstována - metajazyk tedy musí obsahovat příslušné sémantické pojmy (predikáty "pravdivý", "označuje", "definuje" atd.). Dále bude obsahovat samotný objektový jazyk (nebo jeho překlad), výrazy z jeho morfologie (tj. označení pro jednotlivé výrazy jazyka, jejich vztahy a vlastnosti) a výrazy obecně logické povahy. Podstatné je, že predikát "pravdivý" je obsažen pouze v metajazyku; tak je možné dosáhnout konzistence.

Obecné schéma pro žádanou definici vypadá následovně: "x je pravdivá věta tehdy a jen tehdy, když p"; kde x zastupuje jméno věty a p je tato věta samotná. Předpokládejme nyní např., že naším objektovým jazykem je nějaký výsek německého jazyka obsahující mj. slova "es" a "schneit"; naším metajazykem nechť je čeština. Formulujme:
(*) Věta "Es schneit" je pravdivá tehdy a jen tehdy, když sněží.
Touto větou, označenou jako (*), je určena podmínka pravdivosti pro německou větu "Es schneit". Úplné definice pravdy pro daný jazyk by bylo dosaženo definitivním výčtem takto sepsaných pravdivostních podmínek všech vět uvažovaného výseku. To je ovšem s ohledem na nekonečný počet vět většiny uvažovaných jazyků nemožné. Omezíme se proto na umělé jazyky specifické výstavby (jako je např. kalkul tříd), jejichž věty jsou popsány rekurzí. Definice bude pak zadána rekurzivním výkladem pravdivostních podmínek pro věty objektového jazyka, doplněným seznamy, kde budou singulárním termínům objektového jazyka přiřazeny předměty a obecným termínům pojmy. Základní podmínka bude formulována pro atomické věty; příklad: je-li P jednomístný predikát a b singulární termín, pak věta "Pb" je pravdivá tehdy a jen tehdy, když předmět b spadá pod pojem P. Ostatní podmínky specifikují pravdivost věty s ohledem na její výstavbu pomocí logických spojek a kvantifikátorů; příklad: nechť p, q jsou věty, věta "$p \wedge q$" je pravdivá tehdy a jen

tehdy, je-li pravdivá "p" a zároveň "q". Nyní již lze pro každou jednotlivou větu daného jazyka, případně pro jeho "extenzionálně" vybudovanou část, říci, za jakých podmínek je pravdivá.

Jako nejzávažnější důsledky Tarského definice uvádí Popper [OE,9,I] následujících pět bodů:
1. pojem pravdy je korektně definovatelný logickými prostředky, je tedy logicky legitimní;
2. je aplikovatelný na každý jednoznačně formulovaný výrok (neuniverzálního jazyka), není-li aplikovatelný na jeho negaci, tedy pojem "pravdy" není prázdný, ačkoli
3. není spjat s žádným obecným kritériem (další z Tarského výsledků), i když každá věta odvoditelná z pravdivé teorie je pravdivá;
4. třída pravdivých vět je deduktivní systém,
5. který je pro dostatečně bohaté jazyky nerozhodnutelný.

Shrňme a rozšiřme: Tarského definice umožňuje chápat pravdu jako vlastnost teorií, tedy jako něco *objektivního*. O jakékoli množině tvrzení se navíc nyní můžeme ptát, zda jsou pravdivá - pravda je tedy spíše absolutní než relativní. Její objektivita ale není spojena s žádným kritériem, které by nám umožnilo zjistit pro libovolné tvrzení, zda je či není pravdivé (rovněž zde je jistota iluzí). Pro mnohá tvrzení jsme schopni jejich pravdivost dokázat, podle Gödelových a Tarského prací však víme, že již v rámci aritmetiky existuje nekonečné množství pravdivých vět, jejichž pravdivost je principielně nedokazatelná. Analogická situace se týká platných deduktivních odvození. Rovněž zde nemáme obecné kritérium platnosti; k danému odvození se však můžeme pokusit uvést protipříklad; jestliže se nám to podaří, pak odvození nebo úsudkové pravidlo není platné, ať již někteří jednotlivci nebo třeba úplně všichni intuitivně tvrdí, že platné je. Platnost deduktivního odvození (resp. pravda nějaké věty) je objektivní právě proto, že nezávisí na mínění toho či onoho člověka, na jeho víře či intuici, ale na existenci či neexistenci protipříkladu (resp. na stavu světa). Je-li nějaký úsudek platný, pak je platný i za stavu všeobecného přesvědčení, že tomu tak není, a důvodem je jen a jen fakt, že k němu objektivně neexistuje žádný protipříklad, s čímž může těžko kdo cokoli udělat. Svět našich tvrzení, teorií a úsudků je tedy v jistém (právě uvedeném) smyslu autonomní - ačkoli se jedná o naše výtvory, nevíme o nich zdaleka všechno a principielně ani vědět nemůžeme. [A,32]

Objektivismus. Poslední věty předchozího odstavce představují centrální úvahy objektivistické teorie poznání. Ústřední myšlenku objektivismu lze ztotožnit s Bolzanovým pozorováním, že pravdivost nějaké věty (třeba, že ten a ten strom měl loni tolik a tolik listů) nijak nezávisí na tom, zda byla tato věty někým myšlena či vyslovena. Určitá skutečnost nemusí být nikomu známa, přesto však je pravdivost věty, která tuto skutečnost tvrdí nebo popírá, jednoznačně garantována, a to jen a jen ohledem na příslušný stav světa. Uvažujeme-li tedy pravdivost nějaké věty, subjekt zůstává stále mimo hru. Navíc naše teorie vedou něco jako život sám pro sebe - jsou v jistém smyslu *autonomní*. Námi zadané axiomy mají důsledky a vztahy, které nejsme schopni dohlédnout, ať bychom přijatá východiska promýšleli sebevíc. Pokusy o řešení aktuálních problémů nás staví před problémy nové, většinou nezamýšlené, a chceme-li v uvažovaném rámci pokročit dále, musíme je brát v potaz, ať se nám to sebevíc nezamlouvá a rádi bychom je ignorovali. Zajímavé důsledky našich teorií a řešení našich problémů nezávisí na naší libovůli - musíme je objevit stejně jako objevujeme neznámý druh zvířete. V tomto smyslu lze naše teorie a naše problémy považovat za stejně samostatné a existující objekty jako třeba ježky - uvažujeme-li kupř. o přirozených číslech, je existence sudých čísel zcela objektivní fakt, ať již o něm víme či ne; podobně jako výskyt bílého ježka. [OE,3,3]

Ke světu fyzických předmětů - světu 1 - a světu našich psychických prožitků - světu 2 - přidává Popper *svět 3* - svět našich teorií a ostatních výtvorů lidského ducha. Jeho autonomnost jsme již zmínili, jeho působení na nás je neoddiskutovatelný fakt - člověk, který se celý život věnoval matematice, jistě nebude tvrdit, že mu ho nevyplňovaly teorie, ale jen tiskařská čerň matematických kompendií. Od Platónovy říše idejí odlišuje svět 3 jeho (1) dynamičnost - je naším dílem a s námi se také mění - a (2) povaha jeho obyvatel - jsou v něm teorie, věty, nikoli neměnné ideje, objekty. [Z,S2],[OE,4,1-8]

Klasická epistemologie a s ní i většina filosofů (s výjimkou Bolzana a Fregeho) vycházela z předpokladu, že existuje jen jeden druh poznání, totiž poznání, které má poznávající subjekt. Uvědomíme-li si, že pravý cíl našeho poznání - totiž pravdivost námi formulovaných teorií - na subjektu nikterak nezávisí, vyskytne se nutnost formulace nového konceptu poznání - poznání objektivního. [OE,2,20] Veden těmito úvahami, rozlišuje takto Popper: (1) *poznání subjektivní*, sestávající se z dispozic a očekávání jednotlivých organismů a (2) *poznání objektivní*, složené ze slovně formulovaných očekávání, která mohou být vystavena kritické

diskusi. Rozdíl mezi oběma druhy je zásadní. Subjektivní poznání narozdíl od objektivního nepodléhá kritice (nechceme-li ovšem usmrtit jeho nositele), i když se může vyvíjet či přizpůsobovat (anpassen) metodou mutace a výběru. Oprotitomu objektivní poznání se může měnit a rozvíjet vyřazením slovně formulovaných domněnek; nositel tedy může zůstat naživu a je-li sebekritický, dokonce sem a tam sám usmrtit některou ze svých vlastních hypotéz. [OE,2,15]
Shrňme: Objektivita vědeckého poznání je garantována jednak jeho kritizovatelností (bez vědecké obce není věda) a jednak objektivitou pravdy. V žádném případě si ovšem nečiní nárok na definitivnost či spolehlivost, vždyť nemáme žádné kritérium (to platí již v aritmetice, v přírodních vědách je to pochopitelně ještě drastičtější). Naše věty jsou buď pravdivé či nepravdivé, ale zda je to tak či tak se s jistotou (snad s výjimkou logiky a elementární aritmetiky) nedozvíme nikdy.
Řešení dilematu. Objektivní teorie poznání nám pomůže rozřešit Humovo dilema. Jak již bylo zmíněno, v souvislosti s indukcí formuloval Hume problémy dva - logický a psychologický - a právě jejich smíchání stojí za celou kauzou. Humova víra v indukci byla (v Popperově interpretaci) založena na neobyčejně rozšířené a zcela falešné teorii poznání, která z člověka činí pouhého pasivního sběratele faktů - "*teorii kýble*". Podle této mají veškeré informace povahu smyslových dat, jež jsou shromažďována v našem mozku jako v kýblu. (K případné chybě dochází pouze poruchami při přenosu informace - dokonalý mozek by se nikdy nezmýlil.) Poznání přesahující zkušenost lze pak získat asociacemi idejí, přičemž zesílení lze docílit opakováním. [OE,2,12] Učení podle této teorie tedy tkví v opakování, resp. v pasivní účasti opakujícímu se jevu. Nyní již stačí ztotožnit subjektivní psychická hnutí a pochody s úsudky, zaměnit tedy objekty světů 2 a 3, a dilema je na světě. [OE,2,29], [OE,2,4]

Teorie kýble je veskrze falešná. Nejprve je nutné si uvědomit, že žádné dva časoprostorově odlišené jevy nejsou totožné. Chceme-li hovořit o opakování, musíme vycházet z předpokladu, že si jsou tyto jevy nějakým způsobem podobné. Ale podobnost sama o sobě není něco, co bychom mohli skupině předmětů přisoudit podobně snadno jako třeba bílou barvu. Řekne-li někdo větu "předměty x a y jsou si podobné", je nasnadě dotaz, v jakém ohledu. Dva lidé si mohou být např. podobní z *hlediska* tělesné konstrukce, ale zcela nepodobní svým chováním. Hume se domníval, že naše poznatky lze vysvětlit opakovaným působením určitých jevů na naše smysly: přežene-li se kolem mne mnohokrát labuť, dostanu neodolatelné nutkání tvrdit, že labutě jsou bílé, a tajemným důvodem přicházejícím pouze z vnějšku je, že si byli tito sympatičtí ptáci v průběhu protokolární promenády podobní. Takováto teorie je ovšem neudržitelná, neboť: máme-li nějakou posloupnost jevů, pak si mohou být tyto jevy z jistého hlediska podobné (přičemž není problém si k libovolné konečné posloupnosti příslušné hledisko podobnosti dodatečně vytvořit), z jiného ne. Těchto hledisek je nepřeberné množství a záleží jen na nás, jaké si vybereme - na našem interesu, na našem očekávání. Jsme tedy aktivním a primárním článkem procesu poznání a naše teorie nejsou pouhým výsledkem inklinace usuzovat pod tíhou opakovaného na obecné. [LdF,A*10]

Kyvadlo hodin bylo nesčetněkrát na levé straně ciferníku, lze z toho ale usuzovat, že je tam pořád? Parádní příklad kyblíkové teorie - podmíněný reflex - byl rovněž zpochybněn. Pavlovův pes měl především aktivní zájem na jídle, vytvořil si tedy teorii - když zazvoní zvonek, přijde jídlo. To je ostatně v souladu s dalšími výzkumy - je-li pes odvázán, přiběhne se štěkotem a vrtěním ocasu ke zvonku a žebrá o jídlo. [Z,S1]

Naše poznání, naše věda, není stravováním smyslových dat, vnikajících do nás našimi smysly, nýbrž aktivním vytvářením hypotéz, domněnek, a jejich předkládáním přírodě. Příroda neodpovídá, není-li tázána; abychom něco ulovili, musíme nejprve vyhodit sítě. [Z,S1]

Velkým přínosem Kantovy teorie poznání bylo právě zdůraznění naší vrozené *aktivity* v poznávacím procesu, tj. našeho primátu v něm. Jsme to my, náš rozum, kdo přírodě předepisuje - očekává od ní - jisté zákonitosti, jisté pravidelnosti (a řadu z nich - ne-li všechny - již ze své podstaty, nezkušenostně, apriori). Všechny organismy jsou, Popperovými slovy, bytosti "nasáklé teoriemi" (theoriegetränkt). Každý smyslový orgán má v sobě geneticky vestavěny anticipující teorie - oko je teorií o tom, že světlo se chová tak a tak apod. [OE,2,18] Kantovou chybou byl pouze předpoklad platnosti našich předzkušenostních teorií. Ne vše, co jí předepisujeme, si příroda nechá líbit.[13]

[13] V rozhovoru s Konrádem Lorenzem Popper říká: "... všechny hypotézy, všechny teorie jsou geneticky, co do svého vzniku, apriorní, ať už jsou vytvořeny dříve nebo později, ať jsou součástí dějin druhu anebo součástí našeho individuálního života. Je jen nutno objasnit, že se Kant mýlil, když se domníval, že všechno, co je 'a priori', musí být pravdivé. Hypotézy jsou apriorní: a přesto mohou být nesprávné. Typický příklad: novorozenec očekává, že o něj bude pečováno. To může být tragický omyl a dítě pak zahyne. 'A priori' bylo sice z dobrého důvodu zakotveno v genomu, ale

Příčinou Humova dilematu byla na jedné straně záměna pravdivosti věty a našeho přesvědčení o ní, a na druhé straně falešná nauka o poznání (učení) prostřednictvím opakování. Opřeni o koncept objektivního poznání můžeme s plnou rozhodností říci, že náš rozum není iracionální, jak se domníval Hume, neboť platné úsudky logiky nejsou totéž, co duševní pochody a naše osobní přesvědčení o pravdivosti té či oné přírodovědné hypotézy nemá nic do činění s logickým oprávněním takové domněnky. Z naší víry v zítřejší východ Slunce neplyne platnost věty "každé ráno vychází Slunce", a domnívá-li se někdo, že mu takovéto vědění o světě zaručila indukce, nechť zví, že se o žádné vědění nejedná, že jde pouhou domněnku, kterou nejspíš přijal z ryze praktických důvodů. Učení neprobíhá induktivně, tj. pasivním zaznamenáváním četnosti jevů, ale je aktivním vytvářením hypotéz (spojeným s jejich následnou korekcí); nejde tedy proti rozumu (logice).

Metoda přírodních věd. Slabost novopozitivistů pro indukci měla vedle zmíněné touhy po jistotě ještě jeden významný rys. V novověku s rozvojem přírodních věd vyvstala reálná potřeba jejich odlišení od spekulativní teologie. Status oficiální metody vědeckého bádání získala díky Baconovi právě indukce, která měla jakožto postup od singulárních vět (pozorování, experimentů) k obecným větám (hypotézám, teoriím, zákonům) věrně zachycovat předpokládaný výkon přírodovědcův. Jednou z nejvážnějších námitek proti odmítnutí induktivních metod je právě tvrzení, že by tím empirické vědy ztratily charakteristiku, kterou jim Bacon zajistil ostré odlišení od metafyziky. Úlohu najít takovéto kritérium nazývá Popper *problémem demarkace* (Abgrenzungsproblem). Obliba indukce u empiristických teoretiků spočívá právě v touze po takovém kritériu, oddělujícím s konečnou platností metafyziku, jakožto žvást prostý jakéhokoli smyslu, od vědeckých tvrzení. Taková byla i motivace pozitivismu. Novější verze této doktríny, jak ji reprezentoval Vídeňský kroužek, uznává jako vědecky legitimní jen takové věty, které jsou logicky převeditelné na elementární zkušenostní věty; jen takovým větách přiřkne smysl. Tyto pravé (smysluplné) věty musí být definitivně verifikovatelné (rozhodnutelné), a to právě prostřednictvím svého vztahu k pozorovacím větám. Znalost všech pozorovacích vět by nám zajistila znalost všech přírodních zákonů.

Kritériem vědeckosti teorie má tedy být její *verifikovatelnost.* Ale:

---

neexistuje žádná záruka, že se očekávání splní."

Podle výše uvedených závěrů žádný logicky platný prostředek potvrzení obecných vět ze singulárních neexistuje. Teorie nemohou být tedy nikdy empiricky verifikovatelné. Kritérium nabízené pozitivismem tak ze smysluplných vět vylučuje i všechny zákony přírodních věd - rozdíl mezi nimi a metafyzikou je tedy setřen, nikoli vytyčen. [LdF,1,6], [VWII,11]
Deduktivismus. Namísto indukce je nutno postavit novou, věrohodnější teorii vědeckého bádání. Indukce je neplatná; platný způsob usuzování nám nabízí dedukce, a na ní je také založena Popperem navržená metoda empirických věd - *deduktivní testování teorií*:
Z předběžně přijaté anticipace, nápadu, hypotézy jsou deduktivní cestou vyvozeny důsledky; tyto jsou pak porovnány mezi sebou a s jinými větami, čímž se zjistí, které logické vztahy (ekvivalence, odvoditelnost, slučitelnost, spor) mezi nimi existují.
Při testování teorie lze rozlišit jako zvláště významné čtyři směry:
1. srovnání důsledků teorie navzájem, čímž zjišťujeme vnitřní bezespornost systému,
2. zkoumání logické formy, čímž zjišťujeme povahu systému (není-li např. tautologický),
3. srovnání s jinými teoriemi, čímž zjišťujeme, zda zkoumaná teorie, která se již v ostatních hlediscích osvědčila, představuje vědecký pokrok,
4. empirická aplikace.
Poslední z bodů, který zjišťuje praktický význam teorie, probíhá opět na deduktivní bázi. Ze systému jsou vyvozovány empiricky snadno přezkušitelné singulární důsledky (prognózy) a konfrontovány s výsledky experimentů. V případě, že obstojí, je teorie dočasně verifikována - osvědčila se - nemáme žádný podnět k jejímu zavržení. V případě, že jsou její důsledky s výsledky experimentů ve sporu, padá s nimi i celý systém a je tak falzifikován - to je v souladu s modem tollens, jediným silným deduktivním pravidlem, které nám dovoluje usuzovat “induktivním směrem”, tj. směrem od singulárních tvrzení k obecným. Proti falešné metodě indukce je tak postavena deduktivní metoda pokusu a omylu. [LdF,1,3]

Co se týče demarkačního kritéria, je jasné, že verifikovatelnost jím není. Veškeré potvrzení, kterého se nějaké teorii dostává, je jen dočasné; teorie se pouze osvědčuje, do té doby, než se nám ji podaří vyvrátit - definitivně falzifikovat. Přímo se tedy nabízí možnost vzít jako demarkační kritérium namísto verifikovatelnosti *falzifikovatelnost* systému. Od empirického systému tak místo pozitivní ověřitelnosti požadujeme, aby jej jeho logická forma umožnila cestou metodického přezkoušení vyvrátit: empiricko-vědecký systém musí být schopen ztroskotat na zkušenosti.

Zvolené kritérium se opírá o asymetrii mezi falzifikovatelností a verifikovatelností, úzce související s logickou formou obecné věty. Ta není odvoditelná ze singulárních vět, může s nimi ovšem být v rozporu - a na tomto základě již můžeme pomocí modu tollens falzifikovat celou teorii. [LdF,1,6]

Pravděpodobnost a indukce. Negativní podoba Popperova kritéria věrně kopíruje naši situaci: propastný rozdíl mezi nekonečností našeho nevědění a nepatrností našeho vědění. Snažíme se hledat pravdu, ale téměř nikdy ji nemáme, a máme-li ji, pak o tom buď nevíme (nemáme žádný prostředek verifikace) nebo se jedná o pravdu značně triviální (tautologické věty logiky a matematiky).

V centru našeho zájmu stojí takové teorie, které mají co největší explikační sílu, tedy které mají pokud možno co nejvíce netriviálně pravdivých důsledků. Čím větší má teorie počet důsledků, tedy čím víc je pro nás zajímavá, tím větší je také pravděpodobnost, že mezi jejími důsledky je některý nepravdivý, tedy že se jedná o teorii falešnou. Nejzajímavější teorie, které navrhneme, jsou tak s největší pravděpodobností nepravdivé. S rostoucím obsahem teorie (množstvím důsledků) tedy klesá její *pravděpodobnost* (dále nazývaná pravděpodobností logickou). To je ovšem zcela v rozporu s tím, co požaduje klasická teorie poznání zaměřená na jistotu. Ta se snaží kritice z pozic deduktivní logiky (Humův logický problém) vyhnout tak, že již nepožaduje od přírodních zákonů platnost, ale pouze vysokou pravděpodobnost, nějakým způsobem závisící (potvrditelnou) na četnosti singulárních případů. Bez ohledu na to, že i tato argumentace končí buď nekonečným regresem nebo apriorismem, lze ukázat, že jakákoli formální axiomatika pravděpodobnostního kalkulu (splňující několik obvyklých požadavků) musí při zachování konzistence přiřazovat obecným větám pravděpodobnost blízkou nule.

Ve stručnosti uveďme k tomuto bodu jeden z méně formálních Popperových argumentů[14]:

Příklad: Einsteinova teorie gravitace (dále jen E) je hypotéza, která je logicky velmi nepravděpodobná, neboť předpovídá nejen Newtonovské pohyby planet, nýbrž také malou odchylku perihélia Merkuru.

Teze: Jestliže se tato teorie (zatím) osvědčila ve všech testech, může být sotva náhoda, že činí všechny tyto tak nepravděpodobné předpovědi, aniž by byla pravdivá.

---

[14] Formálnější a velmi elegantní důkaz neexistence pravděpodobnostní indukce předvádí Popper (mj.) v [LdF,XVIII*].

Z toho lze usoudit, že její pravdivost je tak pravděpodobná, jako jsou úspěchy jejích předpovědí coby uskupení čistě náhodných případů nepravděpodobné.

Vyvrácení teze: Předpokládejme, že argument platí. Pravděpodobnost, že teorie E je pravdivá je tedy velmi vysoká, dejme tomu $P(E) = 1 - p$; kde p je pravděpodobnost, že byla potvrzena pouze náhodou, což je v případě, že předpovídané efekty byly logicky velmi nepravděpodobné (a to je právě tento případ), dostatečně malé číslo, aby byla $P(E)$ blízko číslu 1.

Uvažme nyní navíc teorii Newtonovu (dále jen N). Ta činí rovněž velké množství logicky málo pravděpodobných předpovědí; její pravděpodobnost tedy musí být rovněž blízko 1. Einsteinova teorie musí mít ovšem pravděpodobnost vyšší. Podle pravděpodobnostního kalkulu nyní platí:
$P(N \vee E, e) = P(N, e) + P(E, e) - P(N \wedge E, e)$,
obě teorie jsou ovšem neslučitelné, tedy platí $P(N \wedge E, e) = 0$, tedy
$P(N \vee E, e) = P(N, e) + P(E, e) \sim 2$,
což je spor. [OE,2,33]

Chceme-li pro teorii uvažovat charakteristiku podobnou klasickému pojetí pravděpodobnosti - tj. stupeň jejího *osvědčení* (Bewährungsgrad)[15], je nutné si uvědomit, že o jeho hodnotě nerozhoduje ani tak počet příznivých případů, který může být snadno obdobný u teorií drasticky různé ceny, ale spíše náročnost (síla) testování, kterému jsme dotyčnou teorii podrobili. Stupeň testovatelnosti ovšem roste s obsahem teorie, tj. s její precizností a záběrem předpovědi, tedy s její nepravděpodobností. Věrohodný koncept osvědčení teorie musí být tedy nepřímo úměrný její pravděpodobnosti, nikoli naopak. Potvrzení (osvědčení) nějaké teorie proto nechápeme ve smyslu (oslabené) verifikace, jak je tomu u induktivistických teoretiků, ale jako zprávu o tom, že teorie přestála vážné pokusy o vyvrácení. Induktivisticky chápaná potvrditelnost (Carnap) troskotá ze stejných důvodů jako pokusy o verifikaci: přírodní zákony tvrdí o světě příliš mnoho - mnohem více, než bychom kdy byli našimi omezenými možnostmi schopni verifikovat či potvrdit. [VWII,11,6], [LdF,X,82-83]

Přibližování se k pravdě. Ze zkušenosti jistě známe případ tvrzení, které bylo vytvořeno se záměrem obelhat, tedy jako nepravdivé, bylo však navíc sofistikovaně vystavěno tak, aby obsahovalo prvky pravdy, aby bylo pravdě podobné (wahrheitsähnlich); přinejmenším podobnější než jiná, příliš okatá lež. Máme-li dvě teorie $T1$ a $T2$, z nichž druhá nejenže vysvětluje lépe a přesněji to, co její předchůdkyně, ale předpovídá i pro tuto zcela nevysvětlitelná fakta, je situace obdobná. Obě teorie budou nejspíš nepravdivé a na vysokou pravděpodobnost jedné

[15] Bývá překládáno jako stupeň koroborace, Popper později používá místo stupně osvědčení (Bewährungsgrad) stupeň potvrzení (Bestätigungsgrad).

z nich se (jak bylo probráno výše) nemůžeme odvolávat. Teorie $T2$ je však (intuitivně) v lepším souladu se zjištěnými fakty (se skutečností) než teorie $T1$; je pravdě blíž. Kdyby se nám podařilo formulovat dobré podmínky pro to, kdy je nějaká teorie lepší aproximací pravdy než nějaká teorie jiná, dostali bychom tak do rukou silný pozitivní výsledek, umožňující objektivními prostředky zachytit postup od jedné teorie k druhé, tedy pokrok.

Blízkost či podobnost pravdě (verisimilitude) by navíc byla mnohem vhodnější regulativní ideou než samotná pravdivost. Nejenže svým názvem nesvádí k hledání trivialit či principielně nevyvratitelných tvrzení, ale dotýká se i nepravdivých teorií, s nimiž se s velkou pravděpodobností budeme setkávat nejčastěji. V centru našeho zájmu jsou totiž právě ty teorie, u nichž je pro velký počet jejich netriviálních důsledků vyvrácení velmi pravděpodobné. [OE,2,10]

Myšlenkou přibližování k pravdě se Popper zabýval již v [LdF], formálně ji však explikoval až v [VWII] a [OE]. Opřel se přitom o pojem pravdivostního obsahu teorie, veden ideou předpokládaného nárůstu počtu pravdivých důsledků u teorie pravdě bližší. Podle definice uvedené v [OE,2,7] lze říci, že teorie $T1$ je blíže pravdě než teorie $T2$, jsou-li splněny následující podmínky:
(a) jejich pozitivní a negativní obsahy (tj. třídy všech pravdivých a nepravdivých důsledků) jsou srovnatelné a buď
(b) pozitivní obsah $T2$ je menší než pozitivní obsah $T1$, nikoli však negativní, nebo
(c) negativní obsah $T2$ je větší než negativní obsah $T1$, ale nikoli pozitivní.
Vedle této definice - aby dosáhl principiální srovnatelnosti všech teorií navzájem - zavádí Popper ještě definici pravděpodobnostní, založenou na nepřímé úměře obsahu a logické pravděpodobnosti tvrzení příp. teorie. To mu následně umožní přiřadit každému obsahu A míru jeho pozitivního obsahu $ct_T(A)$, definovanou jako $1-p(A_T)$, kde A_T je pozitivní obsah A, a míru jeho negativního obsahu $ct_F(A)$, definovanou obdobně. Blízkost pravdě je pak chápána ve smyslu vysoké hodnoty ct_T a nízké ct_F.

Avšak bohužel; ačkoli je motivace právě formulovaných definic přesvědčivá, jejich přehlednost lákavá a zdá se, že by mohly předběžně deklarovaným požadavkům vyhovovat, ve světle ostré kritiky, jíž byly podrobeny (mj. ze strany P. Tichého) a jež poukázala na jejich zcela neintuitivní důsledky, byl Popper donucen k podstatné reformulaci. Pokusy o specifikaci potenciálního pokroku (tj. logických podmínek, za jakých uznáme teorii kladenou na místo teorie staré jakožto pokrok, aniž bychom ji zatím testovali) a otázky potvrzení teorie nepravděpodobnými předpověďmi jej přivedly k charakterizaci relativní blízkosti pravdě pomocí pojmu koroborace (Bewährung). Ten by měl být v té formě, ve které jej Popper explikuje v [LdF,IX*], výše zmíněnými námitkami nezasažen. Z důvodu rozsáhlého aparátu se jím zde však není možné zabývat. [LdF,XV*]

Shrňme: Blízkost pravdě je zjevně pojmem značně problematickým a dá se očekávat, že pro přijatelnou definici jsou zapotřebí okázalejší prostředky než byla původně použitá třída důsledků. Naléhavost uspokojivé formulace pojmu verisimilitude je zřejmá: jednalo by se o podobně cenný a transparentní výsledek jakým je Tarského definice pravdy, posun poznání od nějaké teorie k teorii jiné by byl podobně jako pravda objektivní a absolutní. [OE,2,9-11]

Kritika. Metodou vědy je metoda odvážných domněnek a nápaditých a vážných pokusů o jejich vyvrácení. [OE,2,23] Vznik vědy byl umožněn rozvinutím lidské řeči, resp. jejích vyšších funkcí. S první z nich, funkcí deskripce, se objevuje problém správného a špatného zobrazování - vyvstává problém pravdy. Ta je regulativní ideou našeho poznání. Vynalezení popisu umožnilo vznik další funkce, zaměřené na přezkoumávání objektivní pravdivosti našich teorií - *funkce argumentativní*. Tím byla umožněna vědomá selekce našich teorií a kritika se tak mohla stát hlavním motorem pokroku. Poznání cílené na pravdu (objektivní poznání) si není možné bez racionální kritiky představit.

Rozvoj vědy ilustruje Popper pomocí následujícího schématu:

$$\text{P1} \Rightarrow \text{PT} \Rightarrow \text{E} \Rightarrow \text{P2}$$

Začínáme problémem (P1) a vytyčíme předběžnou teorii (PT). Snažíme se eliminovat chyby (E) tj. kriticky přezkoumat naši předběžně navrženou teorii (domněnku). Pokusy o její řešení se dostáváme do nové problémové situace, ocitáme se tak před novým problémem (P2), v jistém smyslu neúmyslným, neboť autonomně vyvěrajícím ze vztahů, jež jsme úmyslně či neúmyslně vytvořili (autonomie světa 3). [OE,4,6]

Podstatným rysem celého procesu poznání je jeho nezavršenost - naše snaha o řešení jednoho problému plodí řadu problémů nových. Uvážíme-li navíc nekonečnost možností, které nám náš jazyk k popisu a spoluutváření skutečnosti nabízí (jsem-li obyvatel primitivního kmene a mám k dispozici pouze pět číslovek, jsem o jisté skutečnosti a vztahy nutně ochuzen), lze dnes módní sny o finální teorii považovat spíše za vtip. (Totéž platí i pro většinu forem determinismu.) [OE,8], [VWI,9,IX], [GE,II,2,VI a VII]

Logika jako organon kritiky. Jak již bylo výše řečeno, je logika vědou o platném usuzování. Platné úsudkové schéma přenáší pravdivost premis na závěr (transmise pravdy), ale i nepravdivost závěru na jednu z premis (retransmise nepravdy). Tím se (v Popperově interpretaci) stává logika také *teorií (organem) racionální kritiky*: během kritické diskuse se snažíme vyvrátit teorii vyvozením nepřijatelných důsledků; povede-li se nám to, je podle nauky o dedukci teorie vyvrácena. S odvoláním k oběma zákonům dedukce lze rozdělit aplikace logiky do dvou částí:

(1) její použití v dokazujících disciplínách (matematika), kde je používána v důkazech - k transmisi pravdy

(2) v empirických vědách, kde je užívána ke kritice - k retransmisi nepravdy.

Objektivní povaha logiky (platnost) a jejích výsledků (pravda, přibližování pravdě) tak zaručuje objektivitu kritické metodě, a potažmo i celé vědě. [S,5], [OE,8,4]

Sókrates (Závěr). Věda a logika se zrodily v Řecku; vědomi si jistých omezení dokonce můžeme říci - pouze v Řecku. Až po více než tisíci letech zániku antické civilizace dokázala Evropa tuto vědeckou tradici oživit a rozvinout; během středověku nepozorujeme nic, co bychom mohli označit jako převrat, osobnost formátu Aristotela, Kanta či Frega chybí. Otázku, kterou si mají za povinnost klást každé důsledné dějiny filosofie, totiž: co tento náhlý rozpuk řeckého génia podnítilo?[16], je nutné uvážit v celé šíři. Tedy: V čem spočívá tajemství řeckých učenců? Jaké podmínky umožnily vznik fenoménu, na nějž se v jeho podstatných rysech nezmohla žádná z civilizací po dalších tisíc let? Jak je možné, že v poměrně krátkém období mezi Thalétem a Platónem existoval v každé generaci nový originální a hluboký pokus o výklad světa? Popperova odpověď je výmluvná: příčinou rozkvětu řeckého génia byla nově vzniklá tradice - tradice kritické diskuse.

Většina škol civilizací dávnověku měla více či méně religiózní charakter. Úkolem takovéto školy byla sotva kritika, ale spíše udržování tradice, nauky zakladatele, její předání dalším generacím. Jakákoli nová myšlenka je tedy nutně považována za kacířství a vede k rozkolu. Ale

[16] Tak se ptá kupř. Bertrand Russell na úvod své knihy *Wisdom of the West*; ve své odpovědi se ovšem omezuje na pouhé vylíčení poměrů dávnověku.

ani kacíř nechce vlastně nic jiného než návrat k myšlenkám zakladatele - jen má jiné mínění o jejich výkladu. Škola tohoto typu proto může být stěží živnou půdou nových a odvážných myšlenek. Náboženství pěstuje tradici dogmatickou, s kritickým myšlením zcela neslučitelnou. Jeho hlavními nástroji nejsou argumenty, ale články víry a anatémata.

Kreativita a fantazie řeckých škol byla s výše načrtnutým v úplném rozporu. Anaximandros kritizoval svého učitele Thaléta, jednoho ze sedmi mudrců; v tradici nenacházíme ani náznak rozkolu. Je-li Popperova domněnka správná, založil Thalés tím, že dokázal unést kritiku, nový typus školy a tradice. Ta, narozdíl od spojitosti religiózních škol, vedla k pluralitě nauk, které pak mohly pomocí kritické diskuse usilovat o přiblížení k pravdě. Rozvojem a problematizací argumentačních postupů byl následně iniciován vznik logiky. [VWI,5]

Své vyvrcholení nachází kritický racionalismus presokratiků v osobě Sókratově. Jeho metodou nebyla indukce, jak mu podsouvá Aristotelés, ale elenchus - vyvrácení (dogmatu) protipříkladem. Jeho hledání pravdy spojené s vyvracením pravd domnělých bylo upřímné a dovedlo ho k poznání vlastní nevědomosti. Osudným pro celou kritickou tradici se stal fakt, že Aristotelés pochopil Sokratovo "vím že nic nevím" jako vtip; ironickou nadsázku, trik, jak se odlišit od sofistů a založil svou naukou o indukci a nazírání podstat novou tradici jistého vědění. Tak se tradice kritického racionalismu zvrhla v tradici racionalistického dogmatu. [LdF,XIX*,IV a V]

Literatura

[LdF] Popper, Karl, *Logik der Forschung*, (10. Aufl.); J.C.B. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen 1994

[GE] Popper, Karl, *Die beiden Grundprobleme der Erkenntnistheorie*, (2. Aufl.); J.C.B. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen 1994

[OE] Popper, Karl, *Objektive Erkenntnis*, Hoffmann und Campe Verlag, Hamburg 1993 (angl. originál: Objective Knowledge)

[A] Popper, Karl, *Ausgangspunkte, Meine intelektuelle Entwicklung*, Hoffmann und Campe Vrelag, Hamburg 1995 (angl. originál: Unended Quest)

[VWI] Popper, Karl, *Vermutungen und Widerlegungen I*, J.C.B. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen 1994

[VWII] Popper, Karl, *Vermutungen und Widerlegungen II*, J.C.B. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen 1997 (angl. originál: Conjectures and Refutations)

[S] Popper, Karl, *Auf der Suche nach einer besseren Welt*, R. Piper, Hamburg 1984

[1] Popper, Karl, *Alles Leben ist Problemlösen*, R. Piper, München 1996

[Z] Popper, Karl *(Lorenz, Konrad) Budoucnost je otevřená*, Vyšehrad, Praha 1997 (něm. originál: Die Zukunft ist offen)

[OS] Popper, Karl, *Otevřená společnost II.*, Oikoymenh, Praha 1994 (angl. originál: The Open Society and Its Enemies)

[2] Bolzano, Bernard, *Vědosloví*, Academia, Praha 1981

[3] Frege, Gottlob, *Logik*, in Gottlob Frege Nachgelassene Schriften; Felix Meiner Verlag, Hamburg 1969

[E] Hume, David, *Enquiry concerning Human Understanding*, Oxford University Press 1975

[T] Hume, David, *A Treatise of Human Nature*, Oxford University Press 1978

[4] Kant, Immanuel, *Kritik der reinen Vernunft*, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main 1992

[P] Kant, Immanuel, *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik die als Wissenschaft wird auftreten können*, in Immanuel Kant, Schriften zur Metaphysik und Logik I, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main 1993

[5] Russell, Bertrand, *A History of Western Philosophy*, London, George Allen & Unwin 1946

[6] Russell, Bertrand, *Wisdom of the West*, Rathbone Books, London 1959

[U] Schopenhauer, Arthur, *Über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde*, in Arthur Schopenhauer: Kleinere Schriften, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main 1993

[7] Tarski, Alfred, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, Studia Philosophica, Leopoli 1935

[8] Tarski, Alfred, *O pojmu logického vyplývání*, in Teorie modelů a modelování, Svoboda, Praha 1967

2.2 Je neformální logika logikou? *Zdeněk Zastávka*

Pokud termín *logika* považujeme za zkratku (zkrácenou formulaci) termínu formální logika, pak *neformální logika* logikou není. Pokud však připustíme obecnější význam termínu *logika*, pokud uznáváme i jiné logiky, než je logika formální – např. *filozofickou logiku* –, pak je zde i neformální logika.

V mnoha – zejména anglicky psaných – současných monografiích o logice najdeme kapitolu o neformálních chybách, které většinou pojednávají o chybných argumentacích. Patrick J. Hurley v *A Concise Introduction to Logic* (Belmont, California, Wadsworth Publishing Company, 1998) má kapitolu *Informal fallacies.* Kapitolu s názvem *Fallacies* najdeme v monografiích Irvin M. Copi – Carl Cohen: *Introduction to Logic* (Macmillan, New York 1986), John Nolt – Dennis Rohatyn: *Theory and Problems of Logic* (Schaum's Outline Series, McGraw-Hill).

První informaci o neformální logice jako učebním předmětu přinesl doc. Jauris ze studijního pobytu v USA v roce 1989 - včetně literatury. Tam je kromě termínu "Informal Logic" vyučována také pod názvy "Critical Thinking", "Analysis of Arguments", příp. i jinak. (*Neformální logikou* nerozumíme to, co P. F. Strawson, tedy jako analýzu funkcí ťástí výroku – např. spony "je" –, zejména v Aristotelských výrocích.) Na katedře logiky FF UK jsme neformální logiku zařadili do výuky logiky na oborech sociologie, ekonomie a pedagogika. (Vždy šlo o dvě až tři lekce ke konci závěrečného semestru.) Ve spolupráci s MŠ jsme v roce 1992 připravili i učební text *Základy neformální logiky* (Jauris – Zastávka, nakl. S & M v Praze) pro střední školy. (S tímto textem jsme pracovali na seminářích pro středoškolské učitele, kteří měli zájem tento předmět vyučovat.) S výukou neformální logiky na SŠ rovněž máme vlastní zkušenosti. (V témže roce byl vydán jako *Studijní texty Lidové univerzity J. A. Komenského v Praze* text *Zdeněk Zastávka: Cvičení k chybným argumentacím.*)

Kapitolu *Základy neformální logiky* napsal pro učebnici *Základy společenských věd* (nakl. Fortuna, Praha 1995) Vladimír Svoboda, kapitola se stejným názvem *Základy neformální logiky* je v učebním textu Jaroslava Hladíka *Společenské vědy v kostce pro střední školy* (nakl. Fragment, Havlíčkův Brod 1996).

Za základní problematiku neformální logiky považujeme *teorii argumentace*, v užším slova smyslu pak problematiku chybných argumentací. (V tomto smyslu se neformální logikou zabývají i uvedené oba učební texty. V učebnici *Logika pro střední školy* Oldřicha Seluckého – vyd. nakl. FORTUNA, Praha 1995 – je kapitola *O důvodech a argumentaci.*)

Při přípravě textu *Základy neformální logiky* jsme si uvědomili, že výchozí klasifikaci chybných argumentací provedl již Aristoteles. Ovšem byl to nejen Aristoteles, kde jsme našli mnoho z toho, čím se zabývají současní zájemci o neformální logiku. Protože mnoho z těchto problémů patří i k rétorice, dostali jsme se k *Základům rétoriky*, kterou napsal v prvním století n. l. Marcus Fabius Quintilianus. A to již byl jenom krůček k tomu, abychom celou problematiku považovali za renesanci *eristiky*, ve které byli mistry - jak nás o tom poučí i *Encyklopedie antiky* (Academia, Praha 1973) - sofisté. Ta byla i předmětem Aristotelova spisku *O sofistických důkazech* a o mnoho později pak *Eristická dialektika* Arthura Schopenhauera. U nás máme klasický text Karla Čapka *Dvanáctero figur zápasu perem čili příručka písemné polemiky* (in: *Marsyas čili na okraj literatury*).

Základní osnova pojetí *neformální logiky*:

- eristika,
- neformální logika,
- teorie argumentace.

Věcná problematika se týká filozofie a psychologie, za výchozí považujeme formální logiku. A to proto, že za nejzávažnější chybnou argumentaci byla a je považována *logicky chybná argumentace*, tedy argumentace, kdy teze nevyplývá z argumentů, kdy jde o chybné deduktivní usuzování *non sequitur*.

Výchozí pojmy *eristika* a *neformální logika* mají pro nás tento význam:

Eristika

Podle již zmíněné *Encyklopedie antiky* je to *umění vést slovní spor, tj. dokazovat nebo vyvracet jakékoliv tvrzení, bez ohledu na to, zda je pravdivé či nepravdivé.* Podle Vladimíra Neffa je to *umění filozofické hádky, drcení a zpitomování soupeře všemi prostředky* (*Filozofický slovník pro samouky neboli Antigorgias*). Arthur Shopenhauer eristiku – tu nazýval *eristickou dialektikou* – považoval za "šermířské umění", kde se používají různé "triky a úskoky sporu", ovšem s cílem "dosáhnout pravdy v diskusi a nikoliv objektivní pravdy jako takové".

Znalost eristiky je znalostí všech vhodných a možných metod a způsobů komunikace s každým, koho chceme – a často musíme – přivést k tomu, aby přijal náš názor, aby s námi souhlasil, aby udělal to, co my chceme.

Znalost eristiky je ovšem znalostí také toho, jak jsou tyto prostředky používány proti nám, proti našim zájmům, proti našim názorům, proti způsobu našeho myšlení. Eristika je tak "zbraní" nejen pro náš útok, ale i pro naši obranu. Když rozpoznáme čím se na nás útočí, když o tom máme potřebné vědomosti, snáze se nám tento útok daří odrazit a přejít do protiútoku. V eristice pak platí, že největším vítězstvím je, když útočníka porazíme použitím jeho vlastních zbraní.

Eristika je také záležitostí etickou a sociální. Jinak přesvědčujeme děti a jinak dospělé, jinak zdravé a jinak nemocné (co má říci lékař vážně nemocnému pacientovi o jeho zdravotním stavu?), jinak v běžných životních situacích a jinak ve vypjatých dobách (přírodní katastrofa, válka aj.) Jinak argumentujeme v normálních situacích a jinak v situacích nenormálních. Co je však normální a co je nenormální? Jiří Vácha ve studii *Problém normálnosti v biologii a lékařství* (Avicenum, Praha 1980) uvádí tuto zajímavou myšlenku: "Je nutné také výslovně upozornit na to, že problém normálnosti zde chápeme jako problém formálně metodologický, nikoliv věcně obsahový." Le Bon v *Psychologii davu* varuje řečníka před tím, aby "před rozzuřeným davem rozvinul logické úvahy", protože "na davy nelze působit logickými myšlenkami", protože v davu lze ovlivnit "vždy jen jejich city a nikdy jejich rozum".

Neformální logika a teorie argumentace

Říci, co je neformální logika, znamená říci, že to není logika formální. Profesionální zvládnutí neformální logiky není možné bez základních znalostí formální logiky. Neformální logika je v současné době studována převážně jako teorie argumentace. Pro mnohé je předmět obou těchto disciplín totožný. Pokud se podíváme do našich starších příruček logiky, pak hodně z toho, co je dnes považováno za teorii argumentace, tam najdeme. Tak např. v *Logice* Pelikána a Dratvové z roku 1926 (nakl. SFINX v Praze) je to část *O důkazu (kritika).* Nejpropracovanější částí teorie argumentace je logická teorie úsudku a usuzování, problematika odvozování a vyplývání. Kdy je úsudek logicky správný a nesprávný – kdy z premis vyplývá či nevyplývá závěr. To jsou významné prostředky "logického myšlení" jak běžného (každodenního), tak odborného (profesionálního) života. Za potřebné považujeme věnovat se logicky chybné argumentaci (non sequitur) v manažerské a právní praxi. Hodně podnětů k další problematice najdeme v manažerské literatuře o marketinku, public relations (zvláště pak o reklamě), koučování i rétorice a seznámení se se soudní a advokátní praxí (např. studiem dostupné judikatury). Z logické literatury je třeba použít výsledky některých neklasických logik, jako je deontická logika a logická teorie otázek (erotetická logika). I když poplatnou své době, je z literatury tzv. právní logiky u nás stále ojedinělou publikací *Právné myslenie a logika* napsána kolektivem českých a slovenských autorů pod vedením Viktora Knappa a Pavla Hollandera (nakl. Obzor, Bratislava 1989).

Výuku *neformální logiky* jsme prováděli s touto osnovou:

- Po výkladu *odvozování* jako výchozího pojmu pro určení předmětu *formální logiky* a řešených problémů *deduktivní logiky*, následuje charakteristika *induktivní logiky (induktivního usuzování).* V části *Jazyk a komunikace* vedle výkladu víceznačností je větší část věnována chybám při definování (chybným definicím).

- *Argumentace* je výchozím pojmem pro charakteristiku neformální logiky, kde se používají nejen racionální (zejména logické), ale i mimoracionální prostředky odůvodňování. Podstatná část je věnována *chybné argumentaci* s touto hrubou klasifikací:

  – *Kvaziargumentace* používá zejména psychické (ale i fyzické) prostředky, kde mezi nejrozšířenější patří ty, kterým se věnuje *psychologie davu.*

- *Jazykové vady.* Ty podrobně studoval zejména Aristoteles. Sem patří víceznačnost slov a vět (ekvivokace - např. homonyma - a amfibolie), chybné složení a rozložení částí a celků větných informací, různé zdůrazňování slov v argumentujících větách a cílevědomé chybné interpretace použitých slovních tvarů.
- Argumentovanou *tezi lze zmanipulovat zveličením nebo nepozorovanou záměnou tezí jinou, kde tzv. falešná stopa je maximální možností, případně tezi lze upravit jejím zesílením nebo zeslabením.*
- *Argumenty* mohou být nejen *chybné*, ale mohou být šikovně *vynechány.* Z této chybné argumentace se nejčastěji setkáme s argumentací kruhem, resp. s entymématem.
- *Presumptivní nebo komplexní otázky* patří k osvědčeným chybným argumentačním metodám.
- Velkou skupinu – dosud málo zpracovanou – tvoří *slabě induktivní argumentace*, kam patří dobře známé unáhlené zobecnění, chybná časová následnost (post hoc, ergo propter hoc) a povrchní *analogie.*

Aktuální je pro nás koncipování eristiky zejména pro dva obory: management (manažerská eristika) a právo (právnická eristika).[17]

Když se současný klasik teorie i praxe managementu Peter F. Drucker ve své autobiografické knize *Svědkem bouřlivého času* (Management Press, Praha 1996) zamýšlí nad základními principy manažérské práce, dochází k tomuto zjištění:

“Obávám se, že my tady na Západě zapomínáme, čemu nás učil Platón na samém začátku systematické analýzy a ve dvou ze svých nejkrásnějších a nejdojímavějších dialogů, ve *Phaedrovi* a *Kritovi*: v dialogu mladíka Phaedra, stojícího na začátku života, a starého Sókrata, stojícího před svou smrtí. Učí nás tomu, že zkušenost neprověřena logikou

[17] *Managementem* rozumíme to, co je definováno v knize Heinz Weihrinch – Harold Koontz: Management (Victoria Publishing, Praha 1993): "*Management* je proces tvorby a udržování prostředí, ve kterém jednotlivci pracují společně ve skupinách a účinně dosahují vybraných cílů.” (Str. 16)

není "rétorika", ale pouhé klepy, a že logika neprověřená zkušeností není "logika", ale blábol." (Str. 202)

To, že pro přípravu právníků, že pro skutečnou právní praxi nestačí jen znalost formální logiky, o tom velmi otevřeně píše ve své knize *Strašná pravda o právnících aneb co vás nenaučí na Yale* (nakl. TALPRES, Praha 1997) Mark H. McCormak, autor dvou velmi úspěšných knih – skutečných bestsellerů – *Co vás nenaučí na Harvardu* a *Co vás stále ještě na Harvardu nenaučí*:

"Ve skutečném světě tedy nejsou pro právnickou praxi podstatné technické detaily, podstatná je *lidská* stránka – mazané, ale účastné chápání lidských konfliktů a lidských pohnutek, vybrušování přesvědčovacích schopností, mistrné zvládnutí jemných nuancí logiky a argumentace – to je jádrem všeho, co právník potřebuje znát." (Str. 12)

MISCELLANEA LOGICA

TOM I

Doc. PhDr. Petr Jirků, CSc., RNDr. Vítězslav Švejdar, CSc.
Editoři

Vydalo Karolinum - nakladatelství Univerzity Karlovy,
Ovocný trh 3, 116 36 Praha 1
Praha 1998
Prorektor-editor prof. MUDr. Pavel Klener, DrSc.
Obálku navrhl Jiří Staněk
Sazbu systémem LaTeX provedli Petr Jirků a Vítězslav Švejdar
Vytiskla tiskárna nakladatelství Karolinum
Vydání první
ISBN 80–7184–578–7